社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.
IT2001-66, ISEC2001-104, SST2001-182,
ITS2001-120 (2002-03)

通信路雑音を考慮した Doğançay-Kennedy ブラインド等化アルゴリズム

八木 秀樹† 小林 学† 平澤 茂一†

† 早稲田大学 理工学部 経営システム工学科
〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1
tel.03-5286-3290
fax.03-5273-7215

E-mail: †yagi@hirasa.mgmt.waseda.ac.jp

あらまし 符号間干渉 (ISI) の補償器として著名なものに Godard ブラインド等化アルゴリズムがあり，このアルゴリズムを改良する様々な研究がなされている．この等化アルゴリズムは非線形最適解を求めるものであり，等化パラメータが局所的最適解に陥ることが問題となっている．近年，K. Doğançay と R. A. Kennedy は Godard アルゴリズムを再定式化し，このアルゴリズムを線形最適化問題に帰着させた．その結果，よりロバストなパラメータ推定が可能となっている．
本稿では，Doğançay-Kennedy アルゴリズムについて雑音モデルを仮定し，等化パラメータの推定値の偏りを少なくする等化アルゴリズムを提案する．また，この等化法の効率よいアルゴリズムを提案する．

キーワード ブラインド等化，適応等化，線形推定法，最小二乗法

An Analysis of Doğançay-Kennedy Blind Equalization Algorithm using Channel Noise Statistics

Hideki YAGI†, Manabu KOBAYASHI†, and Shigeichi HIRASAWA†

† Dep. of Industrial and Management Systems Engineering
Waseda University
3-4-1 Ohkubo , Shinjuku-ku, Tokyo 169-8555
tel.03-5286-3290
fax.03-5273-7215

E-mail: †yagi@hirasa.mgmt.waseda.ac.jp

Abstract One of the most prominent blind channel equalizer is Godard algorithm, which many researchers have been devoted to recently. Since the Godard algorithm has local minima, which leads to inferior equalization performance, recently, K. Doğançay and R. A. Kennedy have reformulated the Godard algorithm so that equalizer parameters converge globally and we can perform more robust way of equalization.
In this paper, the equalization algorithm, which the equalization parameter is proved to control bias of estimator under the certain noise model, is proposed. Furthermore, an efficient adaptive implementation of the algorithm is proposed.

Key words blind equalization, adaptive equalization, linear estimation, least squares method

1 はじめに

物理的な通信路を考慮に入れたとき，送信シンボルが互いに影響を及ぼしあい，符号間干渉 (ISI) を引き起こすため，ISI の補償器設計が大きな課題となっている．中でも通信路特性についての予備知識が無く，トレーニング系列も用いない環境での ISI の補償を目的とした，ブラインド等化法の開発が近年盛んに行われている [3][4][5].

中でも平均二乗誤差 (MSE) 規範に基づく著名なブラインド等化法に Godard アルゴリズムが挙げられる．D. N. Godard は送信シンボルの統計的性質を利用してブラインド等化を行うアルゴリズムを開発した [2]．Godard アルゴリズムは搬送波位相トラッキングと通信路特性推定の過程を独立に行うもので，それにより従来の適応 Least Mean Squares (LMS) 型等化アルゴリズムよりも搬送波位相の歪みに対してロバストな通信路特性の推定が可能となる．しかし，Godard アルゴリズムのコスト関数は推定パラメータに対して非線形関数となるため，有限個の受信シンボルに対する推定パラメータが局所的最適解に陥るという問題が指摘されている [6].

この問題に対して K.Doğançay と R.A.Kennedy は Godard アルゴリズムを線形推定法に再定式化したアルゴリズム (以降この等化アルゴリズムを DK アルゴリズムと呼ぶ) を提案した [1]．DK アルゴリズムでは等化パラメータに対してコスト関数が線形となるため，パラメータの推定値が局所的最適解に陥ることなく，安定した ISI の補償が可能となる．このアルゴリズムは加法的雑音が存在する環境でも非常に有効ではあるが，その一方で Godard アルゴリズムに比べて計算量が増加する．

本稿ではまず，加法的雑音が存在しない場合に，DK アルゴリズムの等化パラメータが真のパラメータと一致することを示す．次に加法的雑音が存在する場合にその偏りを補償する等化アルゴリズムを提案する．また，提案アルゴリズムにかかる計算量を低減する効率的な適応的アルゴリズムを提案する．

2 対象モデル

本稿で対象とする通信路等化モデルを示す．送信シンボル系列 $\{u(k)\}$, $k=1,2,\ldots$ は平均 0 の複素数の系列であるとする．また，線形時不変通信路の伝達関数を $H(z^{-1})$ で表し，安定で因果的であるとする．通信路の伝達関数は z 領域において $H(z^{-1})=\sum_{i=0}^{\infty}h_i z^{-i}$ で表される．ただし $\{h_i\}, i=1,2,\ldots$ は通信路のインパルス応答列である．

時点 k におけるフィルタ受信シンボルを $r(k)$ で表すとすると，$r(k)=\sum_{i=0}^{\infty}h_i u(k-i)+n(k)$ が成り立つ．ここで $n(k)$ は通信路における加法的雑音であり，複素定常過程に従うとする．また雑音系列 $\{n(k)\}$ は送信シンボル系列 $\{u(k)\}$ とは独立であると仮定する．

通信路の逆システム $H^{-1}(z^{-1})$ はインパルス応答長 P の有限インパルス応答 (FIR) システムで近似できると仮定し，

$$H^{-1}(z^{-1})\approx\sum_{i=-\Delta}^{P-\Delta-1}\vartheta_i z^{-i} \tag{1}$$

と表す．ここで $\Delta\geq 0$ は逆システムを因果的にするための十分な遅延を意味し，$\{\vartheta_i\}, i=-\Delta,-\Delta+1,\ldots,P-\Delta-1$ は近似された通信路の逆システムのインパルス応答列を表すものとする．このとき次式が成り立つ．

$$\sum_{i=-\Delta}^{P-\Delta-1}\sum_{j=0}^{\infty}\vartheta_i h_j z^{-(i+j)}=1 \tag{2}$$

式 (1) は通信路特性パラメータを推定する際に安定な適応フィルタを構成するための必要条件を示している．従って，z 領域内で零点を単位円周上に持つような通信路はここでは考慮しない．

線形時変な次数 L の FIR 適応フィルタの伝達関数を $\Theta(k,z)=\sum_{i=0}^{L-1}\theta_i(k)z^{-i}$ で表す．ここで適応フィルタの次数 L は通信路の逆システムの次数 P 以上であるとする．すなわち $L\geq P$ が成り立つものとする．このとき，フィルタの受信系列 $r(k)=(r(k),r(k-1),\ldots,r(k-L+1))^T$ と時点 k におけるフィルタのタップ係数ベクトル $\theta(k)=(\theta_0(k),\theta_1(k),\ldots,\theta_{L-1}(k))^T$ を用いると，

$$y(k)=\sum_{i=0}^{L-1}\theta_i(k)r(k-i)=\theta^T(k)r(k) \tag{3}$$

で表される等化器出力シンボルが判定器に入力される．ここで T は転置を表す．また，本稿を通して $y(k)$ はエルゴード性を有すると仮定する．

Godard アルゴリズムに代表されるブラインド等化アルゴリズムの MSE 規範には送信シンボルの統計的性質を表す定数 γ を用いる．搬送波位相に依存しないでその最小化が小さな MSE 値となるコスト関数には

$$G^{(p)}=E(|y(k)|^p-\gamma)^2 \tag{4}$$

が挙げられる．ここで $E(\cdot)$ は期待値を表す．実際には $p=2$ の場合のコスト関数 $G^{(2)}$ が多く用いられ，定数 γ には dispersion constant $R_2=E\{|u(k)|^4\}/E\{|u(k)|^2\}$ や squared constant $D_2=E\{|u(k)|^2\}$ が著名である [3][4]．変調方式が q 値 PSK の場合には $R_2=D_2=1$ が成り立つ．

本稿を通して，任意の複素数 $x\in\mathcal{C}$ に対してその絶対値を $|x|=\sqrt{xx^*}\in\mathcal{R}$ と定義する．ここで x^* は x の共役複素数を意味する．また，任意の複素数行列 X に対し X^* は X のすべての要素をその共役複素数で置き換えた行列とする．

3 Doğançay-Kennedy アルゴリズム

Godard 等化アルゴリズムで用いられるコスト関数は式 (4) で示すように，$p=1$ の場合を除いては等化パラメータ θ に対して非線形な関数となる．それに伴い，最適な等化パラメータ $\theta^{opt}=\arg\min_{\theta(k)}G^{(p)}$ を求める問題は非線形最適化問題となり，有限な受信シンボルのサンプル数では局所的な最適解に陥るという問題がある．そこで，K.Doğançay と R.A.Kennedy は q 値 PSK を扱うもとで，以下のようにコスト関数と推定対象パラメータを再定式化することにより，パラメータ推定を線形推定問題に帰着させている [1].

以降本稿では，変調方式は q 値 PSK とし，簡単のため等化パラメータベクトルは時不変であるとする．すなわち，$\theta(k)=\theta$ とする．いま，ある θ に対し M 個の受信シンボル系列 $\{r(k),r(k-1),\ldots,r(k-M+1)\}$ が得られたとき，$y(k)$ のエルゴード性より，式 (4) を時間平均に書き直すと，

$$\begin{aligned}
J^{(2)}(\theta)&=\frac{1}{M}\sum_{i=k-M+1}^{k}(|y(i)|^2-R_2)^2\\
&=\frac{1}{M}\sum_{i=k-M+1}^{k}(r^T(i)\theta r^H(i)\theta^*-R_2)^2\\
&=\frac{1}{M}\sum_{i=k-M+1}^{k}((r^T(i)\otimes r^H(i))(\theta\otimes\theta^*)-R_2)^2\\
&=\frac{1}{M}\|Q(\theta\otimes\theta^*)-R_2\mathbf{1}_M\|^2\ .
\end{aligned} \tag{5}$$

が得られる．式 (5) において，H は行列の共役転置，$\otimes$ はクロネッカー積，$\|\cdot\|$ は ℓ_2 ノルムを表す．すなわち $r^H(k)=(r^*(k))^T$ であり，任意の n 次元ベクトル $x=$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ に対して，$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ が成り立つ．式 (5) の最後の等式における行列 Q は

$$Q = \begin{bmatrix} r^T(k) \otimes r^H(k) \\ r^T(k-1) \otimes r^H(k-1) \\ \vdots \\ r^T(k-M+1) \otimes r^H(k-M+1) \end{bmatrix}$$

で表される $M \times L^2$ 行列である．また，$\mathbf{1}_n$ は n 次元全 1 ベクトルとする．式 (5) は L 次元ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に対する非線形関数であるが，L^2 次元ベクトル $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}^*$ と定義することにより次式のように表せる．

$$J^{(2)}(\psi) = \frac{1}{M}\|Q\psi - R_2 \mathbf{1}_M\|^2. \tag{6}$$

明らかに式 (6) は ψ に関して線形コスト関数であり，仮にこのコスト関数を最小化するパラメータ $\boldsymbol{\psi}_{min}$ から $\boldsymbol{\psi}_{min} = \boldsymbol{\theta}_{min} \otimes \boldsymbol{\theta}^*_{min}$ を満たす等化パラメータ $\boldsymbol{\theta}_{min}$ が得られるとすれば，$\boldsymbol{\theta}_{min}$ は式 (5) を最小にする．以降，L^2 次元ベクトル $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{L^2})^T$ を拡大等化パラメータと呼ぶことにする．

式 (6) から最小二乗の正規方程式が得られ，拡大等化パラメータの推定値は

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_{DK} = \boldsymbol{\psi}_{min} = \arg\min_{\psi} J^{(2)}(\psi) = Q^\dagger R_2 \mathbf{1}_M \tag{7}$$

で得られることがわかる．ここで $Q^\dagger = (Q^H Q)^{-1} Q^H$ と定義される Q の一般化逆行列である．

ψ の定義により，ψ と θ は一対一対応とはならないが，Doğançay らは通信路等化に必要な $\boldsymbol{\theta}_{DK}$ の取り出し方を提案している．いま $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{DK} \in \mathcal{C}^L$ を ψ の先頭の L 要素からなるベクトルとする．すなわち，$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{DK} = (\hat{\psi}_{DK,1}, \hat{\psi}_{DK,2}, \ldots, \hat{\psi}_{DK,L})^T$ とおく．$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{DK}$ を等化パラメータとみなしたとき，等化器出力シンボルはある定数 c を用いて

$$y(k) = \tilde{\boldsymbol{\psi}}^T_{DK} \boldsymbol{r}(k) = c\boldsymbol{\theta}^H_{min} \boldsymbol{r}(k) \tag{8}$$

と表せる．式 (8) の両辺を二乗して式 (3) の関係を用いて

$$|y(k)|^2 = |c|^2 \boldsymbol{r}^T(i)\boldsymbol{\theta}_{min}\boldsymbol{r}^H(i)\boldsymbol{\theta}^*_{min} = |c|^2 R_2 \tag{9}$$

が成り立つことを仮定し，係数 c の絶対値を次式で求める．

$$|c| = \frac{|y(k)|}{\sqrt{R_2}}\ . \tag{10}$$

DK 等化アルゴリズムは Godard アルゴリズムと同様に位相シフトとは独立に等化パラメータを推定するので，等化パラメータの推定ベクトルは

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{DK} = \frac{1}{|c|}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^*_{DK} \tag{11}$$

により求めることができる．

式 (7),(9),(11) の手続きにより最小二乗法の陽形式からの等化パラメータ推定が可能となるがその計算量は $L^2 \times L^2$ 行列 $Q^H Q$ の逆行列を求めることが必要なため $O(L^6)$ を要する．

そこで Doğançay らは以下に示す適応 Least Mean Squares (LMS) 型等化アルゴリズムを提案した．まず，L^2 次元ベクトル $\boldsymbol{q}(k) = \boldsymbol{r}(k) \otimes \boldsymbol{r}^*(k)$ を定義し，新しい受信シンボル $\boldsymbol{r}(k)$ が等化器に入力されるたびに次式を繰り返す．

$$e(k) = \boldsymbol{q}^T(k)\hat{\boldsymbol{\psi}}_{DK}(k) - R_2\ , \tag{12}$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_{DK}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_{DK}(k) - \mu e(k)\boldsymbol{q}^*(k)\ . \tag{13}$$

ここで，定数 $\mu > 0$ はスッテプサイズである．また，式 (13) の代わりに次式で定義される正規化 LMS アルゴリズムによりステップサイズを時変にすることも可能である．

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_{DK}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_{DK}(k) - \frac{\tilde{\mu}}{\delta + \|\boldsymbol{q}(k)\|^2} e(k)\boldsymbol{q}^*(k)\ . \tag{14}$$

ここで $0 < \tilde{\mu} < 2$ かつ $\delta > 0$ とする．これら LMS 型アルゴリズムにかかる計算量は $O(L^2)$ となる．一方，Godard アルゴリズムも LMS 型であるが，その計算量は $O(L)$ である．

4 雑音を考慮した等化アルゴリズム

論文 [1] において，DK 等化アルゴリズムの拡大等化パラメータが一致推定量となることが示されている．しかし，有限の受信シンボルをサンプルしたとき，通信路雑音が存在するもとでは等化パラメータの推定値に偏りが起きてしまう．本節では，DK 等化アルゴリズムの等化パラメータの推定量について解析する．次に，通信路雑音を考慮した等化アルゴリズムを提案し，その推定量の偏りについて議論する．

定義 1 時点 k における受信シンボル $r(k)$ の通信路のインパルス応答と送信シンボルによる成分を $v(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i u(k-i)$ と定義する．従って $r(k) = v(k) + n(k)$ が成り立つ．また，L 次元ベクトル $\boldsymbol{v}(k) = (v(k), v(k-1), \ldots, v(k-L+1))^T$ を定義する．さらに，$M \times L^2$ 行列 U を次式で定義する．

$$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^T(k) \otimes \boldsymbol{v}^H(k) \\ \boldsymbol{v}^T(k-1) \otimes \boldsymbol{v}^H(k-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}^T(k-M+1) \otimes \boldsymbol{v}^H(k-M+1) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

また，$\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_{-\Delta}, \vartheta_{-\Delta+1}, \ldots, \vartheta_{-\Delta+L-1})^T$ と定義する．ただし，$L > P$ の場合は $\vartheta_i = 0,\ i = -\Delta + P, -\Delta + P + 1, \ldots, -\Delta + L - 1$ とおく．□

ここで拡大等化パラメータについて，次の定理を示す．

定理 1 真の拡大等化パラメータ $\boldsymbol{\psi}_{true} = \boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{\vartheta}^*$ は次式を満足する．

$$\boldsymbol{\psi}_{true} = U^\dagger R_2 \mathbf{1}_M. \tag{16}$$

ここで $U^\dagger$ は U の一般化逆行列を表す．

(証明) まず，通信路雑音が無く，$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\vartheta}$ とすると

$$\begin{aligned} |y^{opt}(k)|^2 &= \left\{\sum_{i=-\Delta}^{L-\Delta-1} \vartheta_i v(k-i)\right\}^2 \\ &= \left\{\sum_{i=-\Delta}^{L-\Delta-1}\sum_{j=0}^{\infty} \vartheta_i h_j u(k-i-j)\right\}^2 \end{aligned}$$

となる．ここで式 (2) より $|y^{opt}(k)|^2 = |u(k)|^2$ が成り立つ．q 値 PSK では $|u(i)|^2 = R_2$ より任意の $i = k-M+1, k-M+2, \ldots, k$ に対し

$$\begin{aligned} |u(i)|^2 - R_2 &= |y^{opt}(i)|^2 - R_2 \\ &= (\boldsymbol{v}^T(i) \otimes \boldsymbol{v}^H(i))(\boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{\vartheta}^*) - R_2 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

であるから，$U\boldsymbol{\psi}_{true} - R_2\mathbf{1}_M = 0$ が成り立つ．よって，式 (16) が導かれる．□

DK 等化アルゴリズムの拡大等化パラメータの推定ベクトルは以下の性質をもつ．

系 1 通信路雑音が存在しないとき，DK アルゴリズムによって得られる $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{DK}$ は $\boldsymbol{\psi}_{true}$ である．□

ここで，等化パラメータの偏りを補償する等化アルゴリズムを提案する．通信路の加法的雑音 $n(k)$ が送信シンボル系列 $u(k)$ とは独立であり，雑音の相関は既知とする．

定義 2 任意の二つの時点 i, j の雑音 $n(i), n^*(j)$ に対し，その同時確率 $p(n(i), n^*(j))$ での期待値

$$E[n(i)n^*(j)] = \sigma_{i,j} \tag{18}$$

を定義する．また，式 (18) を用いて

$$\bar{N}_{i,j} = \sigma_{k-i-f(j)+1,\ k-i-\ell(j)+1}, \tag{19}$$
$$\text{for } i = 1, 2, \ldots, M,\ j = 1, 2, \ldots, L^2.$$

と定義する．ただし関数 $f(j)$, $\ell(j)$ を

$$f(j) = \lfloor (j-1)/L \rfloor, \tag{20}$$
$$\ell(j) = j - 1 \mod L, \tag{21}$$

と定義する．さらに式 (19) で表される $\bar{N}_{i,j}$ を第 (i,j) 成分にもつ $M \times L^2$ 行列 $\bar{N} = [\bar{N}_{i,j}]$ を定義する．また，$\bar{N}$ は既知とする． □

以下に本稿で提案する等化アルゴリズムを示す．最小二乗の正規方程式を

$$(Q - \bar{N})\psi = R_2 \mathbf{1}_M \tag{22}$$

とする．アルゴリズムにより得られる拡大等化パラメータの推定ベクトルを $\hat{\psi}_{pro}$ で示すと，次式により推定パラメータを得る．

$$\hat{\psi}_{pro} = (Q - \bar{N})^{\dagger} R_2 \mathbf{1}_M. \tag{23}$$

ここで，提案等化アルゴリズムにより推定される拡大等化パラメータ $\hat{\psi}_{pro}$ から，等化パラメータ $\bar{\theta}_{pro}$ の取り出し方について述べる．

定義 3 通信路雑音の L 次元ベクトル $n(k) = (n(k), n(k-1), \ldots, n(k-L+1))^T$ を定義する．すなわち $r(k) = v(k) + n(k)$ とする．また，$j = 1, 2, \ldots, L^2$ のそれぞれについて $\bar{n}_j = \sigma_{k-f(j),\ k-\ell(j)}$ を定義する．ただし $f(j)$, $\ell(j)$ は 式 (20),(21) で表される．さらに，L^2 次元ベクトル $\bar{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_{L^2})^T$ を定義する． □

補題 1 $\bar{n}$ について次式が成り立つ．

$$\bar{n} = E[n(k) \otimes n^*(k)]. \tag{24}$$

(証明) L^2 次元ベクトル $n(k) \otimes n^*(k)$ の 第 l 成分は $n(k-f(l))n^*(k-\ell(l))$ である．したがって，同時確率 $p(n(k-f(l)), n^*(k-\ell(l)))$ で期待値をとると式 (18) より

$$E[n(k-f(l))n^*(k-\ell(l))] = \sigma_{k-f(l),\ k-\ell(l)} = \bar{n}_l \tag{25}$$

が成り立つ．式 (25) の関係は $1 \le l \le L^2$ を満たす全ての l について成り立つので，式 (24) が成り立つ． □

推定パラメータ $\hat{\psi}_{pro}$ を得たのち，先頭の L 要素を取り出し，L 次元ベクトル $\tilde{\psi}_{pro}$ とする．すなわち，$\tilde{\psi}_{pro} = (\hat{\psi}_{pro,1}, \hat{\psi}_{pro,2}, \ldots, \hat{\psi}_{pro,L})$ とする．また，等化パラメータを $\bar{\theta}_{pro}$ とするとき，$\tilde{\psi}_{pro} = \bar{c}\bar{\theta}_{pro}$ を満足する定数を求める．このとき，拡大等化パラメータ $\hat{\psi}_{pro}$ と $\tilde{\psi}_{pro}$ の間には

$$\hat{\psi}_{pro} = \bar{\theta}_{pro} \otimes \bar{\theta}^*_{pro} = \frac{\tilde{\psi}_{pro}}{\bar{c}} \otimes \frac{\tilde{\psi}^*_{pro}}{\bar{c}^*} \tag{26}$$

が成り立つ．このとき提案等化アルゴリズムの正規方程式 (22) から

$$(q(k) - \bar{n})^T (\tilde{\psi}_{pro} \otimes \tilde{\psi}^*_{pro}) = |\bar{c}|^2 R_2 \tag{27}$$

が成り立つ．従って定数は

$$|\bar{c}| = \sqrt{\frac{(q(k) - \bar{n})^T (\tilde{\psi}_{pro} \otimes \tilde{\psi}^*_{pro})}{R_2}} \tag{28}$$

によって求まる．

次に提案等化アルゴリズムによって得られる推定パラメータの偏りについて議論していく．

定義 4 $M \times L^2$ 行列 S, N を以下のように定義する．

$$S = \begin{bmatrix} v^T(k) \otimes n^H(k) \\ v^T(k-1) \otimes n^H(k-1) \\ \vdots \\ v^T(k-M+1) \otimes n^H(k-M+1) \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} n^T(k) \otimes n^H(k) \\ n^T(k-1) \otimes n^H(k-1) \\ \vdots \\ n^T(k-M+1) \otimes n^H(k-M+1) \end{bmatrix}.$$

□

補題 2 定義 1,4 を用いると行列 Q について次式が成り立つ．

$$Q = U + S + S^* + N \tag{29}$$

(証明) 行列 Q の第 i 行目は定義より $q^T(k-i+1)$ である．従って

$$\begin{aligned} q^T(k-i+1) &= r^T(k-i+1) \otimes r^H(k-i+1) \\ &= (v^T(k-i+1) \otimes v^H(k-i+1)) \\ &\quad + (v^T(k-i+1) \otimes n^H(k-i+1)) \\ &\quad + (v^H(k-i+1) \otimes n^T(k-i+1)) \\ &\quad + (n^T(k-i+1) \otimes n^H(k-i+1)) \end{aligned} \tag{30}$$

定義 1 より，式 (30) の最後の等式における第一項は U の第 i 行目を表している．同様に定義 4 から第二項は S，第三項は S^*，第四項は N の第 i 行目を表す．$i = 1, 2, \ldots, M$ に対して式 (30) が成り立つことから，補題が成り立つ． □

行列 S, N の期待値に関して次の補題を示す．

補題 3 行列 S と N のそれぞれに対して同時確率 $p(\{u(k)\}, \{n(k)\})$ に関する期待値をとると次式が成り立つ．

$$E[S] = O_{M \times L^2}, \quad E[N] = \bar{N} \tag{31}$$

ここで $O_{i \times j}$ は 要素が全て 0 の $i \times j$ 行列を表す．

(証明) いま，$i = 1, 2, \ldots, M$ と $j = 1, 2, \ldots, L^2$ について $S_{i,j}$ を行列 S の (i,j) 成分とする．すなわち $S = [S_{i,j}]$ である．このとき $S_{i,j} = v(k-i-f(j)+1)n^*(k-i-\ell(j)+1)$ となる．ただし $f(j)$, $\ell(j)$ は 式 (20),(21) で表される関数である．ここで $i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, L^2$ に関して $S_{i,j}$ に対する期待値は $\{v(k)\}$ と $\{n(k)\}$ の独立性と $E[v(k)] = 0$ から

$$\begin{aligned} E[S_{i,j}] &= E[v(k-i-f(j)+1)n^*(k-i-\ell(j)+1)] \\ &= E[v(k-i-f(j)+1)]\ E[n^*(k-i-\ell(j)+1)] = 0 \end{aligned}$$

となる．従って $E[S] = O_{M \times L^2}$ が成り立つ．

次に $i = 1, 2, \ldots, M$ と $j = 1, 2, \ldots, L^2$ について $N_{i,j}$ を行列 N の (i,j) 成分とする．すなわち $N = [N_{i,j}]$ である．このとき定義より $N_{i,j} = n(k-i-f(j)+1)n^*(k-i-\ell(j)+1)$ が成り立つ．ここで $i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, L^2$ に関して $N_{i,j}$ に対する期待値をとると，式 (18) より

$$\begin{aligned} E[N_{i,j}] &= E[n(k-i-f(j)+1)n^*(k-i-\ell(j)+1)] \\ &= \sigma_{k-i-f(j)+1,\ k-i-\ell(j)+1} = \bar{N}_{i,j} \end{aligned}$$

が成立することから，式 (31) が導かれる． □

定義 5 $M \times L^2$ 行列 F_2 は先頭の 1 列目が $R_2 \mathbf{1}_M$ であり，かつ列フルランクであるとする．また，$UG_{true} = F_2$

を満たす $L^2 \times L^2$ 行列 G_{true} を定義する．さらに，$(Q-\bar{N})G_{pro}=F_2$ を満足する $L^2 \times L^2$ 行列 G_{pro} を定義する．□

定理 2 $L^2 \times L^2$ 行列 G_{true} の先頭の 1 列目は ψ_{true} であり，G_{pro} の先頭の 1 列目は式 (23) で得られる $\hat{\psi}_{pro}$ である．また，G_{true} と G_{pro} は次式を満たす．

$$E[G_{true}^{\dagger}] = E[G_{pro}^{\dagger}]. \tag{32}$$

（証明） 定義より $G_{true}=U^{\dagger}F_2$ が成り立つ．F_2 の先頭の 1 列目は $R_2\mathbf{1}_M$ であるから，定理 1 より G_{true} の先頭の 1 列目は ψ_{true} となる．行列 G_{pro} についても定義より，$G_{pro}=(Q-\bar{N})^{\dagger}F_2$ が成り立つ．このとき式 (23) より G_{pro} の先頭の 1 列目は $\hat{\psi}_{pro}$ でなければならない．

また，式 (16) と G_{true} の定義から式 (33) が成り立ち，式 (22) と G_{pro} の定義から式 (34) が成り立つ．

$$E[U] = F_2E[G_{true}^{\dagger}] \tag{33}$$

$$E[Q-\bar{N}] = F_2E[G_{pro}^{\dagger}]. \tag{34}$$

補題 2,3 より $E[U]=E[Q-\bar{N}]$ が成り立つことから，式 (32) が示される．□

定理 2 より，提案等化アルゴリズムによって得られる推定パラメータと真の等化パラメータをそれぞれ 1 列目に持つ行列 G_{true}, G_{pro} の逆行列の期待値が列フルランクとなる任意の F_2 に対して等しくなることがわかる．提案等化アルゴリズムにかかる計算量は $(Q-\bar{N})$ の逆行列を計算する必要があるので，DK アルゴリズムと同様 $O(L^6)$ である．

ここで提案等化アルゴリズムの計算量削減のため，LMS 型適応アルゴリズムを提案する．LMS 型提案アルゴリズムは，新しい受信シンボル $r(k)$ が等化器に入力されるたびに次式を繰り返す．

$$e(k) = (q(k)-\bar{n})^T\hat{\psi}_{pro}(k) - R_2 \ , \tag{35}$$

$$\hat{\psi}_{pro}(k+1) = \hat{\psi}_{pro}(k) - \mu e(k)(q^*(k)-\bar{n}^*) \ . \tag{36}$$

ここで，定数 $\mu>0$ はステップサイズである．また，式 (36) の代わりに時変なステップサイズを用いた，次式で定義される正規化 LMS アルゴリズムを提案する．

$$\hat{\psi}_{pro}(k+1) = \hat{\psi}_{pro}(k) - \frac{\tilde{\mu}(q^*(k)-\bar{n}^*)}{\delta + \|q(k)\|^2}e(k). \tag{37}$$

ここで $0<\tilde{\mu}<2$ かつ $\delta>0$ とする．これら LMS 型提案等化アルゴリズムにかかる計算量は $O(L^2)$ となる．

5 アルゴリズムの効率化

DK アルゴリズム及び，第 4 節で提案した等化アルゴリズムの問題は計算量の多さである．実際，著名な Godard アルゴリズムが一受信シンボルに対し $O(L)$ の計算量であるのに対し，LMS 型 DK アルゴリズム，LMS 型提案アルゴリズムは $O(L^2)$ の計算量が必要となる．そこで本節では，LMS 型提案アルゴリズムに対して効率良く実行可能なアルゴリズムを提案する．また，本節では通信路雑音系列 $\{n(i)\}$ が独立同分布に従うと仮定する．

定義 6 雑音 $n(k)$ に対して $p(n(k))$ による期待値 $\bar{m}=E[n(k)]$ を定義する．また，$\xi=\sigma_{k,k}-|\bar{m}|^2$ を定義する．さらに L 次元ベクトル $m=\bar{m}\mathbf{1}_L$ を定義する．

$L \times L^2$ 行列 $P=(I_L O_{L\times(L^2-L)})$ を定義する．ここで I_k は $k\times k$ 単位行列を表す．また，L 次元ベクトル $\tilde{\psi}_{pro}(k)$ を式 (36) または式 (37) で得られる k 時点での推定ベクトル $\hat{\psi}_{pro}(k)$ の先頭の L 要素とする．すなわち，$\tilde{\psi}_{pro}(k)=P\hat{\psi}_{pro}(k)$ とする．ベクトル $\tilde{\psi}_{pro}(k)$ を等化パラメータとして用いて 式 (28) と同様の操作で定数 $|\tilde{c}|$ を求める．このとき，$\tilde{\theta}_{pro}(k)=\tilde{\psi}_{pro}(k)/|\tilde{c}|$ を k 時点で求める等化パラメータとする．さらに，二つの L 次元ベクトル $\rho(k)=Pq(k)$ と $\bar{\nu}=P\bar{n}$ を定義する．□

まず，効率良く等化パラメータ $\tilde{\theta}$ を求める方法を次式で示す．

$$\begin{aligned}|\tilde{c}|^2 = \Big\{ & r^T(k)\tilde{\psi}_{pro}(k)(r^T(k)\tilde{\psi}_{pro}(k))^* \\ & - \bar{m}\sum_{i=1}^{L}\tilde{\psi}_{pro,i}(k)(\bar{m}\sum_{j=0}^{L}\tilde{\psi}_{pro,j}(k))^* \\ & + \xi\sum_{i=1}^{L}\tilde{\psi}_{pro,i}(k)\tilde{\psi}_{pro,i}^*(k)\Big\}\Big/R_2,\end{aligned} \tag{38}$$

式 (38) で係数 $|\tilde{c}|$ を求めた後，$\tilde{\theta}_{pro}(k)=\tilde{\psi}_{pro}(k)/|\tilde{c}|$ で等化パラメータを求める．

定義 7 $j=1,2,\ldots,L$ に対し L^2 次元ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を各 ξ の間に L 個の連続する 0 要素があるベクトルと定義する．すなわち，$\boldsymbol{\xi}=(\xi,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{L},\xi,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{L},\xi,0,\ldots,0,\xi)^T$ となる．□

ここで以下の補題を示す．

補題 4 L 次元ベクトル m と L^2 次元ベクトル $\bar{n}$ の間に次式が成り立つ．

$$\bar{n} = m\otimes m^* + \boldsymbol{\xi}. \tag{39}$$

（証明） まず，定義 3,6 から $j=1,2,\ldots,L^2$ に対して L^2 次元ベクトル $m\otimes m^*$ の第 j 要素は $\bar{m}\bar{m}^*$ で表せる．ここで $j\in\{j|f(j)\neq\ell(j)\}$ を満たす L^2-L 個の j については雑音系列の独立性の仮定から

$$E[n(k-f(j))n^*(k-\ell(j))] = \sigma_{k-f(j),\,k-\ell(j)} = \bar{n}_j \tag{40}$$

が成り立つ．また，定義 7 よりベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は $j\in\{j|f(j)\neq\ell(j)\}$ を満足する j について $\xi_j=0$ である．したがって $j\in\{j|f(j)\neq\ell(j)\}$ を満たす L^2-L 個の要素については式 (39) が成り立つ．

次に $j\in\{j|f(j)=\ell(j)\}$ を満足する L 個の j について，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\bar{m}\bar{m}^*+\xi &= |\bar{m}|^2+\sigma_{k-\ell(j),\,k-\ell(j)}-|\bar{m}|^2 \\ &= \sigma_{k-\ell(j),\,k-\ell(j)} = \bar{n}_j.\end{aligned} \tag{41}$$

従って，式 (40),(41) より式 (39) が示せる．□

定理 3 式 (38) を用いて得られる係数 $|\tilde{c}|$ は式 (28) から得られる係数と同じである．また，等化パラメータ $\tilde{\theta}_{pro}(k)$ を求める計算量は $O(L)$ である．

（証明） 式 (39) を用いて式 (28) の二乗を展開すると

$$\begin{aligned}|\tilde{c}|^2 &= (q(k)-\bar{n})^T(\tilde{\psi}_{pro}\otimes\tilde{\psi}_{pro}^*)/R_2 \\ &= \Big\{(r^T(k)\tilde{\psi}_{pro}(k)\cdot r^H(k)\tilde{\psi}_{pro}^*(k) \\ &- m^T\tilde{\psi}_{pro}(k)\cdot m^H\tilde{\psi}_{pro}^*(k)) \\ &+ \xi\sum_{i=1}^{L}\tilde{\psi}_{pro,i}\tilde{\psi}_{pro,i}^*\Big\}/R_2\end{aligned} \tag{42}$$

が成り立つ．従って，式 (28) と式 (38) で得られる係数 $|\tilde{c}|$ は等価であることが示せる．

ここで，式 (38) の右辺の各項について議論する．第一項目の $r^T(k)\tilde{\psi}_{pro}(k)$ は L 回の複素乗算を必要とし，$(r^T(k)\tilde{\psi}_{pro}(k))^*$ は $r^T(k)\tilde{\psi}_{pro}(k)$ よりただちに求まるので合

計 $L+1$ 回の乗算が必要である．第二項の計算は 2 回の複素乗算，第三項目は $L+1$ 回の複素乗算を要する．従って，係数 $|\bar{c}|$ 及び 等価パラメータ $\tilde{\theta}_{pro}(k)=\tilde{\psi}_{pro}(k)/|\bar{c}|$ を求める計算量は $O(L)$ であることが示せる． □

ここで LMS 型提案アルゴリズムの計算量を削減するアルゴリズムを次式で示す．

$$e(k)=r^T(k)\tilde{\theta}_{pro}(k)(r^T(k)\tilde{\theta}_{pro}(k))^* - \bar{m}\sum_{i=1}^{L}\tilde{\theta}_{pro,i}(k)(\bar{m}\sum_{j=0}^{L}\tilde{\theta}_{pro,j}(k))^* + \xi\sum_{i=1}^{L}\tilde{\theta}_{pro,i}(k)\tilde{\theta}^*_{pro,i}(k)-R_2, \qquad (43)$$

$$\tilde{\psi}_{pro}(k+1)=\tilde{\psi}_{pro}(k)-\mu e(k)(\rho^*(k)-\bar{\nu}^*) . \quad (44)$$

定理 4 式 (43) は式 (35) と等価であり，その更新にかかる計算量は $O(L)$ である．

(証明) 式 (39) の関係を用いて式 (35) を展開すると

$$\begin{aligned} e(k) &= (q(k)-\bar{n})^T\hat{\psi}_{pro}(k)-R_2 \\ &= (r^T(k)\tilde{\theta}_{pro}(k)\cdot r^H(k)\tilde{\theta}^*_{pro}(k) \\ &- m^T\tilde{\theta}_{pro}(k)\cdot m^H\tilde{\theta}^*_{pro}(k)) \\ &+ \xi\sum_{i=1}^{L}\tilde{\theta}_{pro,i}\tilde{\theta}^*_{pro,i}-R_2 \end{aligned} \qquad (45)$$

が成り立つ．従って，式 (43) と式 (35) が等価であることが示せる．

ここで，式 (44) の右辺の各項について議論していく．$r^T(k)\tilde{\theta}_{pro}(k)$ は L 回の複素乗算で求まり，$(r^T(k)\,\tilde{\theta}_{pro}(k))^*$ は $r^T(k)\tilde{\theta}_{pro}(k)$ よりただちに求まるので合計 $L+1$ 回の乗算が必要である．第二項の計算は 2 回の複素乗算，第三項目は $L+1$ 回の複素乗算を要する．従って，式 (43) の計算量は $O(L)$ であることが示せる． □

定理 5 式 (44) より得られる等化パラメータ $\tilde{\psi}_{pro}(k)$ と式 (36) より得られる拡大等化パラメータの先頭の L 要素からなるベクトル $(\hat{\psi}_{pro,1}(k),\,\hat{\psi}_{pro,2}(k),\,\ldots,\hat{\psi}_{pro,L}(k))$ は等価である．また，式 (44) の更新にかかる計算量は $O(L)$ である．

(証明) 式 (36) の両辺に定義 6 で定義した $L\times L^2$ 行列 P を左から掛けると

$$\begin{aligned} P\hat{\psi}_{pro}(k+1) &= P\hat{\psi}_{pro}(k)-\mu e(k)P(q^*(k)-\bar{n}^*) . \\ &= \tilde{\psi}_{pro}(k)-\mu e(k)(\rho^*(k)-\bar{\nu}^*) . \\ &= \tilde{\psi}_{pro}(k+1) \end{aligned} \qquad (46)$$

が成り立つ．ゆえに式 (44) より得られる等化パラメータ $\tilde{\psi}_{pro}(k)$ と L 次元ベクトルベクトル $(\hat{\psi}_{pro,1}(k),\hat{\psi}_{pro,2}(k),\ldots,\hat{\psi}_{pro,L})$ は等価であることが証明された．

また，式 (44) において，第二項はスカラー $\mu e(k)$ と L 次元ベクトル $(\rho(k)-\bar{\nu})^*$ の乗算なので $O(L)$ の計算量であることが示せる． □

次に，式 (37) に代えて次式を用いた時変なステップサイズによる効率的正規化 LMS 型提案アルゴリズムを示す．

$$\tilde{\psi}(k+1)=\tilde{\psi}(k)-\frac{\bar{\mu}e(k)(\rho^*(k)-\bar{\nu}^*)}{\delta+\|q(k)\|^2}. \qquad (47)$$

定理 6 式 (47) の更新に必要な計算量は $O(L)$ である．

(証明) $\|q(k)\|^2$ を求めるのに要する計算量について議論する．まず，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \|q(k)\|^2 &= q^T(k)q^*(k) \\ &= (r^T(k)\otimes r^H(k))(r(k)\otimes r^*(k)) \\ &= r^T(k)r(k)\cdot(r^T(k)r(k))^* . \end{aligned} \qquad (48)$$

式 (48) の最後の等式は 1 組の L 次元ベクトル同士の乗算とその結果の共役複素数との乗算で求まるので，計算量は $O(L)$ である．$e(k)(\rho^*(k)-\bar{\nu}^*)$ については定理 5 の証明と同様に $O(L)$ の計算量で求まる．従って定理が証明された． □

この効率化アルゴリズムにかかる計算量は一受信シンボル当り $O(L)$ であることが定理 4,5,6 より得られる．

本節で提案した手法は LMS 型 DK アルゴリズムにも同様に適用可能であり，各パラメータを更新する計算量は一受信シンボル当り $O(L)$ である．このとき，LMS 型 DK アルゴリズムに対しては，通信路雑音のモデルを特に仮定しなくても適用でき，等化性能の劣化は無い．

6 まとめと今後の課題

本稿では DK アルゴリズムの通信路雑音が存在しない場合における等化パラメータが真のパラメータと一致することを示した．また雑音を考慮して，偏りを補償する等化アルゴリズムを提案した．これにより，加法的雑音に対してよりロバストな等化パラメータの推定が可能であると期待できる．

また，DK アルゴリズムの問題点として挙げられる計算量を削減する効率化アルゴリズムを LMS 型アルゴリズムに対して提案した．この結果，提案アルゴリズム及び DK アルゴリズムが共に著名な Godard アルゴリズムと同等の計算量で済むことを示した．提案等化アルゴリズムの効率化の際には雑音系列が独立分布に従うことを仮定したが，このクラスには加法的白色ガウス雑音 (AWGN) モデルなどが属する．さらに，DK アルゴリズムに対して効率化の手法を適用する際には，特に雑音モデルを仮定しなくてもよい．

今後の課題としては適応的アルゴリズムとして有効である再帰的最小二乗 (RLS) 型アルゴリズムを用いた提案等化手法の開発と，その効率化が挙げられる．

謝辞

著者の一人八木は，研究を進めるにあたりご討論，ご助言を頂いている早稲田大学大学院 小笠原尚徳氏に感謝する．本研究の一部は文部科学省平成 12・13 年度科学研究費補助金 (課題番号 12875072) の助成による．

参考文献

[1] K.Doğançay and R.A.Kennedy, "Least squares approach to blind channel equalization," IEEE Trans. Commn. vol.47, No.11, pp.1678-1687, Nov. 1999.

[2] D.N.Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems," IEEE Trans. Commn., vol.com-28, No.11, pp.1867-1875, Nov. 1980.

[3] J.G.Proakis, *Digital Communication*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, Inc. 1993.

[4] C.R.Johnson, Jr., P.Schniter, T.J.Endres, J.D.Behm, D.R.Brown and R.A.Casas, "Blind equalization using the constant modulus criterion: a review," Proc. of IEEE, vol. 86, No. 10, pp.1927-1950, Oct. 1998.

[5] C.R.Johnson, Jr., "Adimissibility in blind adaptive channel equalization," IEEE Control Syst. Mag., vol.11, pp.3-15, Jan. 1991.

[6] H.H.Zeng, L. Tong, C.R.Johnson, Jr., "Relationships between the constant modulus and Wiener receiver," IEEE Trans. Inform. Theory, vol.44, pp.1523 - 1538, July 1998.