D-8-6　ベイズ推定に基づく不確実な知識を用いた推論に関する一考察

A Note on Reasoning with Uncertain Knowledge Based on Bayes Inference

関　崇博†　　鈴木　誠‡　　平澤 茂一†
Takahiro SEKI　　Makoto SUZUKI　　Shigeichi HIRASAWA
†早稲田大学理工学部　　‡湘南工科大学
School of Science and Engineering, Waseda University　　Shonan Institute of Techonogy

1　はじめに

近年人工知能の分野では，不確実な知識の処理がますます重要な課題の一つとなってきている．古典論理に対する不確実な知識を扱う従来の理論の一つとして，最尤推定に基づいた連鎖の演繹推論 [1] が論じられている．

そこで，本稿ではベイズ推定に基づいた連鎖の推論方式について考察する．その際，尤度関数が特殊な形をしているため，ベイズ推定において一般的な事前分布として用いられるベータ分布などでは扱うことが困難となる [2]．そのため新しい事前分布を提案し，これを用いることにより推定の計算量を増加させることなく，連鎖のベイズ推定が従来の連鎖の最尤推定よりも推定誤差が小さくなることをシミュレーションによって示す．なお本稿では三段の連鎖について議論するが，多段の連鎖のベイズ推定についても容易に拡張することができる．

2　問題設定および連鎖の最尤推定

ここでは古典論理における連鎖に対し，不確実性を含む場合の演繹推論 [1] について，簡単のため真か偽をとる3つの論理式 Q_1，Q_2，Q_3 を考え，問題設定の例として三段の連鎖をとり上げる．

[例] Q_1:「学生である」，Q_2:「下宿している」，Q_3:「朝食をとらない」とする．Q_1 が真である n_1 人に対し，$Q_1 \to Q_2$ が真[1]を k_1 人観測し (このサンプルを x_1 と書く)，また独立に別の Q_2 が真である n_2 人に対し，$Q_2 \to Q_3$ が真を k_2 人観測した (これをサンプル x_2 と書く) とする．さらに裏の情報として独立に別の Q_2 が偽である n_3 人に対し，$\neg Q_2 \to Q_3$ が真を k_3 人観測した (これをサンプル x_3 と書く) とする (図1)．これらのサンプリングデータの結果から，Q_1 が真のもとで $Q_1 \to Q_3$(「学生ならば，朝食を取らない」) が真である確信度を推論する．□

またここでは，各属性間の関係は，Q_1 と Q_3 が Q_2 のもとで互いに独立であるという条件付き独立を仮定する．

上記の問題設定において，$Q_1 \to Q_2$ の確信度が p_1，$Q_2 \to Q_3$ の確信度が p_2，裏の情報として $\neg Q_2 \to Q_3$ の確信度が p_3 とすると，$Q_1 \to Q_3$ の確信度の最尤推定量 S は，以下のようになる [1]．

$$S = p_1 \times p_2 + (1 - p_1) \times p_3. \quad (1)$$

$$(p_1 = k_1/n_1, p_2 = k_2/n_2, p_3 = k_3/n_3.)$$

3　提案－連鎖のベイズ推定－

3.1　提案事前分布

前述のように問題設定をおいたとき，論理式 Q_1，Q_2，Q_3 が全て真である確信度を θ_1，Q_1，Q_2 が真で Q_3 が偽のときの確信度を θ_2，Q_1，Q_3 が真で Q_2 が偽のときの確信度を θ_3，Q_1 が真で Q_2，Q_3 が偽のときの確信度を θ_4 とする (図2)．このとき，$Q_1 \to Q_3$ が真である確信度，すなわち $\theta_1 + \theta_3$ についてベイズ推定に基づいて議論する．

定義 1 提案事前分布

$$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+2)\Gamma(\alpha_3+\alpha_4+2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+4)}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)\Gamma(\alpha_3+1)\Gamma(\alpha_4+1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5+2)\Gamma(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6+2)} \times \theta_1^{\alpha_1}\theta_2^{\alpha_2}\theta_3^{\alpha_3}\theta_4^{\alpha_4}(\theta_1+\theta_2)^{\alpha_5}(\theta_3+\theta_4)^{\alpha_6}. \quad (2)$$

ここで $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数で，$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4 = 1(0 < \theta_1, \cdots, \theta_4 < 1)$ かつ，$\alpha_1, \cdots, \alpha_6$ は正の実数とする．□

[1] →は "ならば" である．古典論理の含意ではない．

3.2　事後確率分布

サンプル x_1，x_2，x_3 に対する事後確率分布 $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 | x_1, x_2, x_3)$ は，(2) 式と，図1，図2より得られる尤度関数の式よりベイズ規則を用いて

$$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 | x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+n_2+2)\Gamma(\alpha_3+\alpha_4+n_3+2)}{\Gamma(\alpha_1+k_2+1)\Gamma(\alpha_2+n_2-k_2+1)\Gamma(\alpha_3+k_3+1)\Gamma(\alpha_4+n_3-k_3+1)} \times \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+n_1+4)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5+k_1+2)\Gamma(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6+n_1-k_1+2)} \times \theta_1^{\alpha_1+k_2}\theta_2^{\alpha_2+n_2-k_2}\theta_3^{\alpha_3+k_3}\theta_4^{\alpha_4+n_3-k_3} \times (\theta_1+\theta_2)^{\alpha_5+k_1-n_2}(\theta_3+\theta_4)^{\alpha_6+n_1-k_1-n_3}. \quad (3)$$

となる．また，$\theta_1 + \theta_3$ の期待値は次のようになる．

$$\bar{\theta_1} + \bar{\theta_3} = \frac{(k_1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5+2)(k_2+\alpha_1+1)}{(n_1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+4)(n_2+\alpha_1+\alpha_2+2)} + \frac{(n_1-k_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6+2)(k_3+\alpha_3+1)}{(n_1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+4)(n_3+\alpha_3+\alpha_4+2)}. \quad (4)$$

		下宿している(Q2)		
		真	偽	
朝とらない(Q3)	真	k2	k3	
	偽	n2−k2	n3−k3	
		k1	n1−k1	学生(Q1)

図 1: サンプリングモデル

		下宿している(Q2)		
		真	偽	
朝とらない(Q3)	真	θ1	θ3	
	偽	θ2	θ4	
		θ1+θ2	θ3+θ4	学生(Q1)

図 2: 出現確率モデル

連鎖のベイズ推定では，サンプリングデータが部分的に欠如している場合も推定することができる (例えば $n_3 = k_3 = 0$ とおけばよい)．

4　シミュレーションによる評価

1. 連鎖のベイズ推定 (本研究)
   確信度は (4) 式より求め，また事前分布に一様分布を仮定 ($\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_6 = 0$) する．
2. 真の確信度は，乱数を使って 100 回発生させる．
3. サンプル数は $n_1 = n_2 = n_3$ とし，k_1, k_2, k_3 はそれぞれの論理式 $Q_1 \to Q_2$,$Q_2 \to Q_3$,$\neg Q_2 \to Q_3$ に対し二項分布に従う乱数により 1000 回発生させる．

このような条件で，(1) 式，(4) 式から得られた 2 つの連鎖の確信度の式に対して，サンプル数を増やしていったときの連鎖における真の確信度 $\theta_1 + \theta_3$ との平均二乗誤差を図 3 に示す．

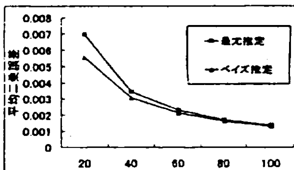

図 3: 平均二乗誤差

5　考察

シミュレーションの結果より，連鎖のベイズ推定の方がデータ数が少ない時点で平均二乗誤差が少ないことがわかる．これは提案した推定がベイズ最適となることからもわかる．また，(1) 式，(4) 式を比較すると，連鎖の最尤推定，連鎖のベイズ推定ともに計算量に差はない．なお，これは多段の連鎖についても同様なことがいえる．

6　まとめ

本研究では，連鎖の演繹推論についてベイズ推定をすることによって，サンプル数が少ない時ほど，従来の連鎖の最尤推定より平均二乗誤差が少ないことを示した．その際通常用いる事前分布では扱えないため，新たな事前分布を提案した．

参考文献

[1] 鈴木 誠，松嶋 敏泰，平澤 茂一: "推論の信頼性を考慮した不確実な知識の表現法と推論法について"，情報処理学会論文誌,Vol.35,No.3,pp.691-705,(1994).

[2] 菊池 淑子，後藤 正幸，俵 信彦: "順序カテゴリカルデータ解析における母数推定に関する研究"，日本経営工学学会論文誌, Vol.50, No.3, pp.164-170,(1999).