

ゆう度比検定を用いた木符号の復号法について

新家 稔央^{†a)} 松嶋 敏泰^{††} 平澤 茂一^{††}

A New Decoding Algorithm Using Likelihood Ratio Testing for Tree Codes

Toshihiro NIINOMI^{†a)}, Toshiyasu MATSUSHIMA^{††}, and Shigeichi HIRASAWA^{††}

あらまし 一般化ビタビアルゴリズム (GVA) は、木符号に対する簡略的復号アルゴリズムであり、固定されたリストサイズ (fixed size list decoder) のリスト復号器を用いる。そして、その復号拘束長を大きくしたときの漸近的な有効性を示す符号化定理が与えられている。本論文では、固定されたリストサイズではなく、リストサイズが確率変数であるリスト復号器 (variable size list decoder) を適用したときの新しい簡略的復号法を提案し、その性質を考察する。

キーワード リスト復号法, 一般化ビタビ復号法, ランダム符号化, 判定基準

1. ま え が き

G.D. Forney, Jr. [5] は、最ゆう復号の一般化により、消失判定を行う復号器、及び、可変リストサイズのリスト復号器 (variable size list decoder. 以下、VLD と記す) の理論的考察を初めて与えた。[5] では、消失判定及び VLD のいずれの復号器も、メッセージは判定基準 (decision criteria) [5] 式 (11) に照らし合わされる。[5] 式 (11) のしきい値 T の値が $T > 0$ ならば、この判定基準を満たす符号語一つが出力されるか何も出力しない (消失) かのいずれかとなるので、消失判定を行う復号器^{注1)}となる。逆に、 $T < 0$ ならば、この判定基準を満たす符号語は、一つ以上の符号語を出力するので、VLD となる ($T = 0$ は最ゆう復号を行う復号器である)。これらの復号器は受信系列が判定基準を満たすか否かによって出力を決定する。この意味で、[5] は、消失判定を行う復号器と VLD とが共通した復号法であることを指摘している。

一方、J.B. Anderson [2] によれば、木符号の復号は、幅優先 (横型探索 width first)、深さ優先 (縦型

探索 depth first)、メトリック優先 (metric first) の方法に大別することが可能である。幅優先のアルゴリズムには、ビタビアルゴリズム (VA) や一般化ビタビアルゴリズム (GVA) [1] が挙げられるが、これらのアルゴリズムは「パス選択を、同じ長さの受信系列に対して行うので、ゆう度の比較によってパスの候補を絞り込んでいく」点が共通する。

したがって、幅優先のアルゴリズムでは、ノードごとのパス選択においてゆう度比較を行う際、ただ1本のパス選択をするアルゴリズムに対して Forney [5] の意味での一般化が可能である^{注2)}。従来、幅優先のアルゴリズムに、このような一般化を行った代表例として、畳込み符号を用いた ARQ 方式 [3] が挙げられる。VA ([9] など) が、ただ1本の最ゆうパスを選択するアルゴリズムであるのに対し、[3] は各ノードのゆう度最大のパス選択に対してゆう度比による消失判定を行っている。これは、VA のノードごとのパス選択に判定基準を設けて、Forney [5] の意味の一般化をした方式と考えることができる。[3] は、消失判定が行われた際には、帰還通信路を通じて再送要求を行う^{注3)} ARQ 方式である。

[†] 神奈川工科大学情報ネットワーク工学科, 厚木市

Department of Information Network Engineering, Kanagawa Institute of Technology, 1030 Shimo-ogino, Atsugi-shi, 243-0292 Japan

^{††} 早稲田大学理工学部経営システム工学科, 東京都

Department of IE and Management Systems, School of Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Ohkubo, Shinjyuku-ku, Tokyo, 169-0072 Japan

a) E-mail: niinomi@nw.kanagawa-it.ac.jp

(注1): ARQ 方式や連接符号の内部符号の復号に利用される。

(注2): スタックアルゴリズムをベースとして消失判定を行う ARQ 方式 [7] では、ゆう度比較によるパス選択をしてはいないため、[5] のようなゆう度に対する検定を判定基準として用いることができない。

(注3): [3] では、判定基準として簡略的なゆう度比検定を用いることと、その結果をサブパイバにラベル付けすることで、トレリス符号に対する消失判定を効率的に実現している。

すると、幅優先のアルゴリズムでは、ノードごとのパス選択において VLD をとる一般化が自然に考えられる。また、従来、固定サイズのリスト復号の代表的な応用例として、GVA がノードごとに複数本のパスの選択を行う方式が有名である。

そこで本研究は、GVA が各々のノードでサバイバを複数残す際、VLD を用いてサバイバを複数残す新しい復号アルゴリズムを提案し、その性質を考察することを目的とする。前述したように、VLD には判定基準が必要だが、本研究では、[3] で用いられたゆう度比検定のしきい値を 1 より小さくし、VLD の判定基準として用いる。なお、シミュレーションでは加法的白色ガウス雑音の加わる通信路、それ以外では通信路容量 C の離散的無記憶通信路を仮定する。

2. 提案アルゴリズム

提案するアルゴリズムでは、GVA [1] と同様、設定された復号制約長 L に対し、 q^{L-1} 個の各ノードごとに複数本のサバイバを残すが、判定基準を設けて VLD^{注4}を行うので、その本数は GVA と異なり固定でない。また、勝ち残ったサバイバの集合をリストと呼ぶ。

2.1 準備

以下では入力アルファベット $A = \{0, 1, \dots, a-1\}$ 、出力アルファベット $B = \{0, 1, \dots, b-1\}$ の離散無記憶通信路 $P = \{P_{ij}, j \in A, i \in B\}$ を仮定し、送信される情報記号系列 (メッセージ) を \mathbf{u}^N で表す。 \mathbf{u}^N は、符号器へ入力される q 元アルファベット $\mathcal{U} = \{0, 1, \dots, q-1\}$ からなる長さ N の系列である。したがって、ある情報記号系列 \mathbf{u}_i^N は、 $\mathbf{u}_i^N = u_{i,1}u_{i,2}\dots u_{i,t}\dots u_{i,N}$ 、ただし、 $u_{i,t} \in \mathcal{U}$ 、 $t = 1, 2, \dots, N$ 、 $i = 1, 2, \dots, q^N$ で示される。木符号は、図 1 のように q 進木で示すことができ、ある情報記号系列はルートから伸びる 1 本のパスに対応する。すなわち、 \mathbf{u}_i^N の第 t ブランチは、 $u_{i,t}$ に対して符号化が行われている。符号化に用いる 1 ブランチ当りの通信路の入力アルファベットの数を v とすると、レート R は、 $R = \frac{1}{v} \ln q$ と定義できる。

なお、パス \mathbf{u}_i^N の第 1 ブランチから第 n ブランチまでの部分系列を \mathbf{u}_i^n で記す。また、第 1 ブランチから第 n ブランチまでのパス \mathbf{u}_i^n を情報系列とする符号系列及び受信系列を、それぞれ、 $\mathbf{x}_i^{v^n}$ 及び $\mathbf{y}_i^{v^n}$ と表し、その第 t ブランチに対する符号系列及び受信系列を、それぞれ、 $\mathbf{x}_{i,t}^v$ 及び \mathbf{y}_t^v で記すことにする。更

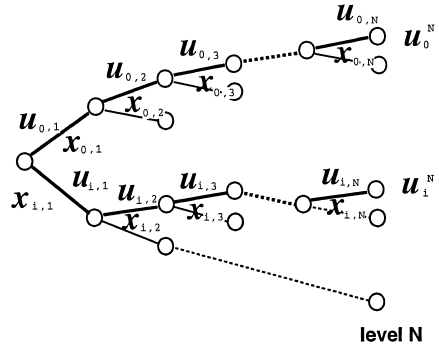


図 1 木符号の例 ($q = 2$)
Fig. 1 Example of tree codes ($q = 2$).

に、チェックテイルの長さを T ブランチで表す。

2.2 アルゴリズム

GVA と同様、以下に示すアルゴリズムでは、(1) ~ (3) の再帰手続きと、チェックテイルにおけるパス選択とに分かれる。本論文で提案するアルゴリズムを [1] と同様、次のように示す。

[再帰手続き] レベル L まで、すべてのパスを伸長する。そして、レベル n ($L \leq n \leq N$) に対して以下の手続きを繰り返す。

(1) 初期条件

レベル $n-1$ において、 q^{L-1} 個の状態ごとに、すべてのパスを保持し、これをリストの初期条件とする。要素は長さ $n-1$ ブランチのパスである。

(2) パス伸長

q^{L-1} 個のリストの各々のサバイバに対して、1 ブランチの伸長を行う。すなわち、情報記号列 \mathbf{u}^{n-1} に対応するパスがサバイバとして残っているとしたとき、 q 本のパスを伸長し、 $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n-1}u$ 、 $u \in \mathcal{U}$ に対するパスのゆう度を計算する。

(3) VLD によるパス選択

レベル n の q^{L-1} の各々のノードに合流するパスの中で k 番目にゆう度の大きいパスを $\mathbf{u}_{(k)}^n$ ^(注5)で表す。

(注4): ブロック符号において、リスト復号誤り確率と平均リストサイズを同時に最小にする最適な判定基準は、[5] に記された判定基準である。この判定基準は、判定に要する計算量を増加させる意味で、木符号や畳込み符号との整合がよい。このことは、VA を用いた判定帰還に対する論文 [4] でも指摘されていた。近年、この判定基準と同等の判定を用いる判定帰還 [13] が研究されているが、本論文では、判定に要する計算量を増やさぬ意味で整合のとれた [3] の判定基準を一般化して用いる。

(注5): 本論文では、レベル n のノードにおいて、情報記号列 \mathbf{u}_k^N に対するゆう度を $Pr(\mathbf{y}^{v^n} | \mathbf{x}_k^{v^n})$ と表すのに対し、ゆう度が k 番目に大きいパスのゆう度を $Pr(\mathbf{y}^{v^n} | \mathbf{x}_{(k)}^{v^n})$ と使い分ける。すなわち、 (\cdot) はあるノードでのパスのゆう度に対する順位を表す添字である。

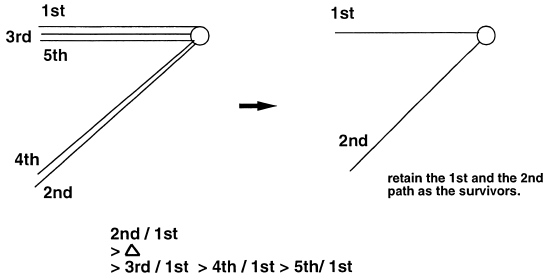


図2 リストの選択
Fig. 2 Testing the list of survivors.

合流するすべてのパスに対して、以下の判定基準^(注6)により、サバイバを決定する。すなわち、 m をこのノードに合流するパスとしたとき、

$$\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_m^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(1)}^{vn})} \geq \Delta, \quad \Delta < 1 \quad (1)$$

であれば、サバイバとする。そうでなければ、捨てる。合流するすべてのパスに対して、(1) を繰り返して選ばれたサバイバの集合を、このノードのリストとする(図2参照)。

[チェックテイルにおけるパス選択]

長さ $L - 1$ の既知シンボルの列 $\mathbf{u}^{L-1} \in \mathcal{U}^{L-1}$ により、再び上記(1)~(3)を用い、レベル $N + L - 1$ におけるただ一つのノードで得られるリストに含まれたサバイバのみに絞る。更に、 $T - (L - 1)$ 個の既知シンボルによる符号語に対してゆう度を計算し、レベル $N + T$ において、この中から最もゆう度の大きいパスを最終的に選択する。

3. 符号化定理の導出

3.1 準備

実際に送信された情報記号列が \mathbf{u}_0^N のとき、次の確率を定義する。

$$P_e(\mathbf{u}_0^N) = [\mathbf{u}_0^N \text{ が復号されない確率}]$$

$$P_{ea}(\mathbf{u}_0^N) = [\text{レベル } N + L - 1 \text{ で作られるリストから } \mathbf{u}_0^N \text{ が外れる確率}]$$

$$P_{eb}(\mathbf{u}_0^N) = [\text{レベル } N + T \text{ において、リストの中からパスを1本に絞ったとき、} \mathbf{u}_0^N \text{ が選ばれない確率}]$$

また、これらの確率を $P_*(\mathbf{u}^N)$ で表したとき、すべてのメッセージに対する平均を

$$P_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}^N} P_*(\mathbf{u}^N)$$

と表すことにする。ただし、 $* \in \{e, ea, eb\}$ 。更に、Forney [5] に習い、復号誤り確率を $Pr(E_1)$ 、レベル $N + T$ において実際に送信された情報記号列以外のパスがリストに含まれる確率を $Pr(E_2)$ とする^(注7)。 $Pr(E_1)$ について、以下の上界が成り立つ。

$$Pr(E_1) = P_e \leq P_{ea} + P_{eb}$$

ここで、 P_{ea}, P_{eb} は、

$$P_{ea} \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} \sum_{n=L}^{N+L-1} P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N),$$

$$P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N) = Pr \left[\begin{array}{l} \text{レベル } n \text{ のノードで、ある} \\ i \neq 0 \text{ に対し、} \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})} \leq \Delta \end{array} \right],$$

$$P_{eb} \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} P_{eb}(\mathbf{u}_0^N),$$

$$P_{eb}(\mathbf{u}_0^N) \leq Pr \left[\begin{array}{l} \text{レベル } N + T \text{ のノードで、ある} \\ i \neq 0 \text{ に対し } \frac{Pr(\mathbf{y}^{v(N+T)} | \mathbf{x}_0^{v(N+T)})}{Pr(\mathbf{y}^{v(N+T)} | \mathbf{x}_i^{v(N+T)})} \geq 1 \end{array} \right]$$

である。 $P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N)$ は、レベル n でリスト復号誤りが起きる確率である。この確率は、正しいパスとそれ以外のパスで最もゆう度の大きいパスとのゆう度比が、しきい値 Δ を超えない確率で上界できる。また、 P_{eb} は、レベル $N + L - 1$ で正しいパスが残っている場合に、レベル $N + T$ で復号誤りの起きる確率である^(注8)。

$Pr(E_2)$ についても、同じくユニオン上界が可能で

(注6): [3] では、VA の各ノードごとに、 $\Delta > 1$ として、しきい値と比べ、最大ゆう度のパスに *Accept* か *Reject* のラベル付けを行い、すべてのサバイバのラベルが *Reject* になったとき、消失と判定する。また、[3] のアルゴリズムが、トレリス全体のパスの中から、必ず最大ゆう度と2番目のパスの比較を行うのに対し、提案アルゴリズムでは木符号に対する復号アルゴリズムである点が異なる。

(注7): $Pr(E_1) = P_e$ ゆえ、2重の表記が不適当にも感じるが、 $Pr(E_1)$ と $Pr(E_2)$ がしきい値 Δ によって、トレードオフの関係があることを強調したいため、[5] に習ってこのような表記を用いた。ただし、[5] では、 $Pr(E_2)$ をリストサイズの平均値と定義しており、本論文とは異なっている。しかしながら、両者は、正しくない符号語がリストに含まれる事象に対する尺度という意味で共通している。

(注8): したがって、 P_{eb} は、正しいパスのゆう度がレベル $N + T$ において、比較されるどれかのパスのゆう度より小さくなる確率で上界できる。

ある．すなわち，

$$Pr(E_2) \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} \sum_{n=L}^{N+L-1} P_{E_2,n}(\mathbf{u}_0^N),$$

$$P_{E_2,n}(\mathbf{u}_0^N) = Pr \left[\begin{array}{l} \text{レベル } n \text{ のノードで，ある} \\ i \neq 0 \text{ に対し } \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} > \Delta \end{array} \right],$$

が成り立つ． $P_{E_2,n}(\mathbf{u}_0^N)$ は，レベル n のあるノードで，実際に送信されたパスが生き残っているとき，このノードで選ばれたリストに 1 本以上の誤りパスが生き残る確率である．

3.2 主要な結果

ランダム符号化を用いた評価結果を以下の補題に示す．はじめに，補題 1 及び補題 2 で，アンサンブルに対する P_{ea} と $Pr(E_2)$ の平均の上界を示す．次に，チェックテイルの長さがある程度とれば， $Pr(E_1)$ は， P_{ea} が支配することを [1] の結果を用いて示す．最後にこれらより，提案したアルゴリズムが達成し得る誤り指数の下界を求めて定理に示す．なお， $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, \dots, q_{a-1}\}$ を通信路シンボルの入力確率分布とする．

[補題 1] ランダムな木符号を用いることで， P_{ea} のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}P_{ea}$ が次式で上界される．

$$\mathcal{E}P_{ea} \leq \frac{Ne^{vR\rho_1}}{1 - e^{-v\epsilon_1}} \cdot \exp \left\{ -Lv \left[E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \sigma_1 \frac{\ln \Delta}{Lv} \right] \right\},$$

$$0 \leq \rho_1 \leq 1, \quad \sigma_1 \geq 0,$$

$$\epsilon_1 = E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \rho_1 R > 0,$$

$$E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) = -\ln \left[\sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-\sigma_1} \right) \left(\sum_{k \in A} q_k P_{jk}^{\sigma_1/\rho_1} \right)^{\rho_1} \right]. \quad (2)$$

(証明) 付録参照．

[補題 2] ランダムな木符号を用いることで， $Pr(E_2)$ のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}Pr(E_2)$ が次式で上界される．

$$\mathcal{E}Pr(E_2) \leq \frac{Ne^{vR\rho_2}}{1 - e^{-v\epsilon_2}} \cdot \exp \left\{ -Lv \left[E_o(\sigma_2, \rho_2, \mathbf{q}) + \sigma_2 \frac{\ln \Delta}{Lv} \right] \right\},$$

$$0 \leq \rho_2 \leq 1, \quad \sigma_2 \geq 0,$$

$$\epsilon_2 = E_o(\sigma_2, \rho_2, \mathbf{q}) - \rho_2 R > 0. \quad (3)$$

(証明) 付録参照．

次に，チェックテイルをある程度とれば， P_{eb} は P_{ea} に対して無視できることを示そう．はじめに， P_{eb} に注目する．補題 3 に [1] で得られた結果を示す．

[補題 3] ランダムな木符号を用いることで， P_{eb} のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}P_{eb}$ が次式で上界される．

$$\mathcal{E}P_{eb} \leq \frac{e^{vR\rho'}}{1 - e^{-v\epsilon'}} \cdot \exp \left[-v(T+1)E_o(\rho', \mathbf{q}) \right],$$

$$0 \leq \rho' \leq 1, \quad \epsilon' = E_o(\rho', \mathbf{q}) - \rho' R > 0,$$

$$E_o(\rho', \mathbf{q}) = -\ln \left[\sum_{k \in B} \left(\sum_{j \in A} q_j P_{kj}^{\frac{1}{1+\rho'}} \right)^{1+\rho'} \right]. \quad (4)$$

(証明) [1]p.875, A-9 参照．

そこで，補題 2，補題 3 より，チェックテイルの長さを

$$T \geq \left\lceil \frac{E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \sigma_1 \frac{\ln \Delta}{Lv}}{E_o(\rho', \mathbf{q})} \right\rceil L - 1 \quad (5)$$

としてやれば，全体の復号誤り確率 $Pr(E_1)$ は，漸近的に P_{ea} の指数部 $E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \sigma_1 \frac{\ln \Delta}{Lv}$ によって支配される．

また，次の補題が [4] と同様に導かれる．

[補題 4] 次式を同時に満たす木符号が存在する．

$$Pr(E_1) \leq 2\mathcal{E}Pr(E_1),$$

$$Pr(E_2) \leq 2\mathcal{E}Pr(E_2). \quad (6)$$

(証明) [14] 参照

以上より，提案アルゴリズムが達成し得る誤り指数を

$$\lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{vL} \ln Pr(E_1) \quad (7)$$

と定義して，その下界を求めてみよう．

このアルゴリズムでは，しきい値が小さいほど，復号誤り確率の指数部を大きくできる．ところが，しきい値を無造作に小さくとったのでは，チェックテイルに至るまでにばく大なサバイバが生き残り，結果とし

て、チェックテイルで 1 本のパスを選択するための比較回数が全体の計算量を支配してしまう。これでは、前節で示したアルゴリズム前半の再帰手続きが意味を失う。そこで、 L を大きくとれば、レベル $N + T$ で作られるリストに誤りパスが含まれる確率を任意に小さくできることを条件に、しきい値を設定をする^(注9)。すなわち、 $-\frac{1}{vL} \ln Pr(E_2) \rightarrow 0 (L \rightarrow \infty)$ であるようにしきい値を定め、 $\frac{\ln \Delta}{Lv}$ の下界を求める。その上で、 σ_2, ρ_2 を最適化する。したがって、提案アルゴリズムが達成可能な誤り指数の下界 $e_1^{new}(R)$ は次式のようになる。

$$e_1^{new}(R) = \max_{\mathbf{q}, \sigma_1, \rho_1 \in \mathcal{D}_1} \left\{ E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \sigma_1 \cdot \min_{\mathbf{q}, \sigma_2, \rho_2 \in \mathcal{D}_2} \left[-\frac{E_o(\sigma_2, \rho_2, \mathbf{q})}{\sigma_2} \right] \right\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{D}_1 = \{0 \leq \rho_1 \leq 1, \sigma_1 \geq 0, \epsilon_1 = E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \rho_1 R > 0\}, \quad (9)$$

$$\mathcal{D}_2 = \{0 \leq \rho_2 \leq 1, \sigma_2 \geq 0, \epsilon_2 = E_o(\sigma_2, \rho_2, \mathbf{q}) - \rho_2 R > 0\}. \quad (10)$$

そこで

$$e_F(R) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathbf{q}, \sigma_2, \rho_2 \in \mathcal{D}_2} \frac{E_o(\sigma_2, \rho_2, \mathbf{q})}{\sigma_2} \quad (11)$$

と定義する^(注10)。 $E_o(\sigma_2, \rho_2, \mathbf{q})$ は、 σ_2 に対して上に凸な関数であるので、 $\frac{E_o(\sigma_2, \rho_2, \mathbf{q})}{\sigma_2}$ の上界は、 $\rho_2 = \nu \sigma_2$ とおけば、

$$e_F(R) = \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \frac{E_o(\sigma_2, \nu \sigma_2, \mathbf{q})}{\sigma_2}, \quad \frac{E_o(\sigma_2, \nu \sigma_2, \mathbf{q})}{\sigma_2} - \nu R > 0 \quad (12)$$

で得られる。そこで、ロピタルの定理より、

$$\lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \frac{E_o(\sigma_2, \nu \sigma_2, \mathbf{q})}{\sigma_2} = \frac{\partial}{\partial \sigma_x} E_o(\sigma_2, \nu \sigma_2, \mathbf{q}) \Big|_{\sigma_x=0} \quad (13)$$

を用いて次の定理を得る。

[定理] 提案アルゴリズムに対する誤り指数の下界 $e_1^{new}(R)$ は、

$$e_1^{new}(R) = \max_{\mathbf{q}, \sigma_1, \rho_1 \in \mathcal{D}_1} \left\{ E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) + \sigma_1 \cdot e_F(R) \right\}, \quad e_F(R) = \max_{\mathbf{q}, \nu \in \mathcal{D}_3} E_{oF}(\nu, \mathbf{q}),$$

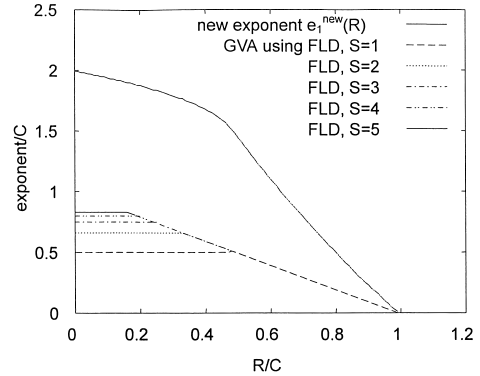


図3 VNCにおける誤り指数
Fig. 3 Exponents on VNC.

$$\mathcal{D}_3 = \{E_{oF}(\nu, \mathbf{q}) - \nu R > 0, \nu > 0\},$$

$$E_{oF}(\nu, \mathbf{q}) = \sum_{k \in B} \sum_{j \in A} q_j P_{kj} \ln \left[\frac{P_{kj}^{1/\nu}}{\sum_{j \in A} q_j P_{kj}^{1/\nu}} \right]^\nu \quad (14)$$

で与えられる^(注11)。

一般の離散無記憶通信路においては、 $e_1^{new}(R)$ をこれ以上、簡単に表現できない。そこで、強雑音通信路（例えば [9], [10] などを参照）において、 $e_1^{new}(R)$ を計算する。 \mathbf{q} を最適化して得られる通信路容量 C の強雑音通信路を仮定すると、

$$E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) = \sigma_1 \left[2 - \sigma_1 \left(1 + \frac{1}{\rho_1} \right) \right] C$$

$$E_{oF}(\nu, \mathbf{q}) = \left(2 - \frac{1}{\nu} \right) C$$

$$e_F(R) = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R}{C}} \right) C$$

である。これより、 $e_1^{new}(R)$ を数値計算すると、図3に示したようになる。

なお、図3ではFLDを用いたオリジナルのGVAの誤り指数も同時に示している。両者とも、それぞれリスト復号の誤り確率が、アルゴリズム全体の誤り確率を支配するが、FLDと比べてVLDの誤り指数

(注9): 誤り指数下界の導出であるから、この条件を付加したとしても達成可能な指数部の導出をしている。

(注10): $e_F(R)$ は、Forneyのブロック符号における帰還誤り指数と連接構造をなす誤り指数 $e_F(R)$, [4]p.568, 式(11)と一致する。

(注11): $e_1^{new}(R)$ は、文献[4]において、p.571 Corollary 2の $e_1(R, p)$ に一致する。

下界が大きき値をとっている．この関係は，以前に知られていたブロック符号に対する FLD の誤り指数下界 [9]p.215 Prob.3.21 と VLD の誤り指数下界 [5] に類似である．

4. シミュレーション

前章では，ランダム符号化を用いた場合における符号化定理を示した．これと同時に提案アルゴリズムに対する計算労力の理論的解析が必要と思われるが，その理論的解析は難しいと思われる．そこで，前章とは必ずしも同じ仮定をとらないが，VLD を用いたときのアルゴリズムの有効性について，計算機シミュレーションによる結果を示す．以下では，白色ガウス雑音 (AWGN) の加わる 2 元通信路を仮定する．

ランダム符号化の結果を見ると，式 (2) 及び式 (3) の指数部から「しきい値の値を変えることにより，誤り確率と保持するパスの平均本数にはトレードオフの関係があり，保持するパスの本数が増えれば誤り確率が減少する．ところが，しきい値の値がある範囲^(注12)を逸脱すると正しいパス以外のパスがいくらかでも保持されることになるので，木符号として復号は破綻する」という推測ができる．そこで，まず，有効なしきい値 (valid threshold) の範囲が存在することを 4.1 のシミュレーションで示す．

次に，有効なしきい値の範囲の中で，提案方式である VLD を用いた GVA と，FLD を用いたオリジナルの GVA を，平均リストサイズ対復号誤り確率で比較する．しきい値の操作により，平均リストサイズが増大すれば計算量は増大する．よって，平均誤り確率とリストサイズの関係は，計算量と誤り確率のトレードオフと見ることが出来る．そこで，計算量の理論的解析が必要だが，これは難しい問題と思われるので，ここでは平均リストサイズ対誤り確率の関係をシミュレーションによって比較する．この結果，FLD と比較して，VLD を用いた方式の方が，少ない計算量で小さい誤り確率が達成できることが示せる．この結果を 4.2 のシミュレーション結果として示す．

本シミュレーションでは，復号拘束長 L に対して十分大きい符号化のブランチ拘束長 23, $R = 1/2$ の畳み込み符号器 [11]p.376 Table 12.1D

$$g1 = [533, 533, 676, 737, 355, 3]_s,$$

$$g2 = [733, 533, 676, 737, 355, 3]_s$$

を用い， $N = 32$ 及び $L = 5$ または $L = 7$ として木

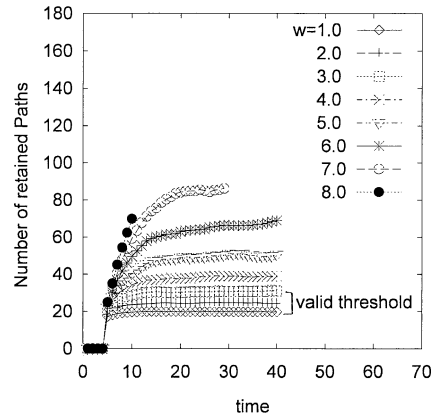


図 4 ノードの深さ (時刻) に対するパスの平均保持本数
Fig.4 Average number of retained paths vs time.
($L = 5, E_0/N_0 = 5$ dB)

符号に対する復号を近似的に実現する．また，3. で示した符号化定理によって与えられた式に示される性質を追認をしたいため，2. で示したアルゴリズムをそのまま用いる．提案アルゴリズムでは，SN 比が大きいか少ないメモリでシミュレーションの実行が可能であるけれども，SN 比が大きい通信路ほどシミュレーションによる評価が難しくなる．そこでメモリの制約として，VLD の保持できる最大のパス本数を 3000 本と固定し，この本数以上にパスを保持する必要が 50000 サンプルに対して一度も生じない条件でプロットを行った．更に，誤り確率については，50000 サンプルに対してブロック誤り確率を最も小さくする最小の T を選んで評価を行った．この条件のもとで，前述したようなアルゴリズムの振舞いが確認できる SN 比を選んで結果を示した．

4.1 木符号の復号として有効なしきい値の範囲

本論文で提案する復号法は，木符号が対象であるから「有限の復号拘束長で復号を行う場合，無限に長い情報系列の復号のために保持すべきパスの本数が，たかだか有限である」ことが必要条件である．まず，この範囲が，あるしきい値の範囲にあることを示す．このことは言い換えれば，十分長い情報系列の復号を行ったときに，提案アルゴリズムの保持するパスの平均本数が時刻によらず定常になる領域が，あるしきい値の範囲に存在していることである^(注13)．図 4 ~ 図 7

(注12): ランダム符号化では，しきい値の範囲は式 (2) 及び式 (3) の指数部がともに正になる範囲が適なしきい値の範囲と示せる．しかし，具体的符号を与えた場合，この範囲を陽に求めることはできない．

(注13): この事実が成り立っていない場合，復号するために保持すべきパスの本数が情報系列の長さ依存して増加する．

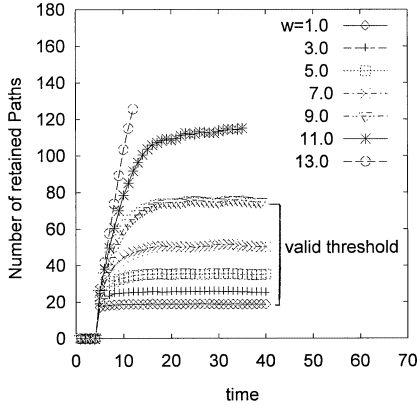


図 5 ノードの深さ (時刻) に対するパスの平均保持本数
Fig. 5 Average number of retained paths vs time. ($L = 5, E_0/N_0 = 7 \text{ dB}$)

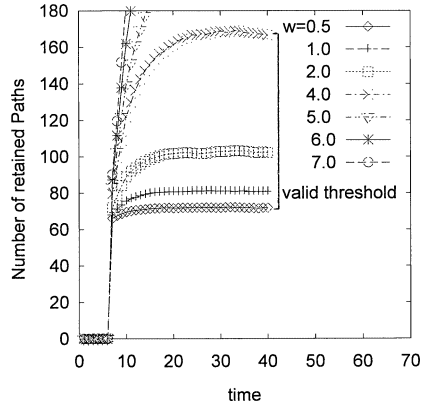


図 7 ノードの深さ (時刻) に対するパスの平均保持本数
Fig. 7 Average number of retained paths vs depth time. ($L = 7, E_0/N_0 = 5 \text{ dB}$)

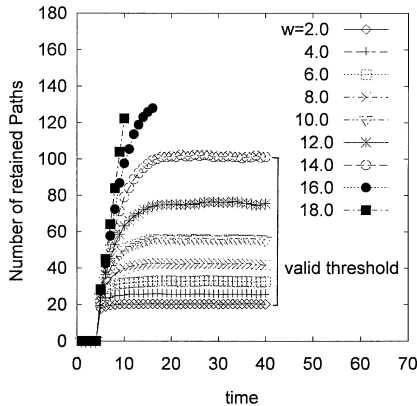


図 6 ノードの深さ (時刻) に対するパスの平均保持本数
Fig. 6 Average number of retained paths vs time. ($L = 5, E_0/N_0 = 9 \text{ dB}$)

では、ノードの深さ (時刻) に対し、提案アルゴリズムが保持するパスの平均本数を示している。それぞれの図においては、 w を動かしてしきい値

$$\Delta = e^{-w\sqrt{R_r(E_b/2N_0)}}$$

を変化させたとき、保持するパスの平均本数が時間とともに変化する様子を見ることができる。ただし、情報シンボル 1 ビット当りの SN 比を E_b/N_0 とする。

いずれの図においても、 w がある値以下のときは、保持しているパスの本数が時刻によらず一定だが、ある値を超えると、時間に対し増加することが分かる。前述したように、保持するパスの平均本数が時刻によらない範囲を有効とするが、この範囲は通信路で変化する。同じ $L = 5$ であれば SN 比が大きいほど広く

(図 4~図 6), L が大きいほど広い (図 7 及び図 4)。

4.2 有効な範囲でのブロック誤り確率

4.2.1 FLD と VLD を用いたときのパスの比較回数と平均リストサイズ

q^{L-1} 個のノードで行われる 1 対のパス比較の回数を計算量の単位にとれば、オリジナルの FLD を用いた GVA が $q^{L-1} [qS^2 - \frac{S(S+1)}{2}]$ 回^(注14)であるのに対し、VLD を用いたときは $q^{L-1} [2q\bar{S} - 3]$ 回である^(注15)。ただし、 \bar{S} をリストサイズの平均とする。したがって、オリジナルの GVA と同様、復号拘束長 L が支配項となるが、平均リストサイズの値を同等にとれば、VLD を用いた復号法の比較回数がより少なくなる。

そこで、以下では、平均リストサイズに対する誤り確率をシミュレーションによって解析し、VLD を用いた復号法に優れた領域があることを示そう。

4.2.2 平均リストサイズに対する FLD と VLD の誤り確率

しきい値に対するパスの平均保持本数をもとに、提案アルゴリズムが有効に動作するしきい値の範囲を特定し、この範囲のしきい値を変化させ、平均リストサイズに対するブロック誤り確率を調べてみた (図 8~図 10)。これらの図では、ノード当り何本のパスを保持しているか (ノード当りの平均リストサイズ) に対し、達成する誤り確率をプロットしている。

いずれの図においても、FLD, VLD とともに、リス

(注 14): ゆう度が 1 番大きいものから S 番手まで、パルスソートを用いたときの比較回数である。

(注 15): ノードの中でゆう度が 1 番大きいパスを見つけた後、それ以外のパスをリストに残すか判定する。

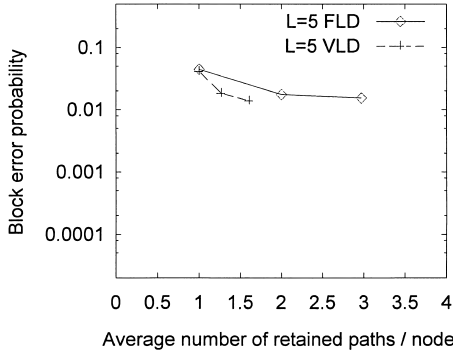


図 8 復号誤り確率とノード当りの平均リストサイズ
Fig. 8 Block error probability vs average list size. ($L = 5$, $E_0/N_0 = 4$ dB)

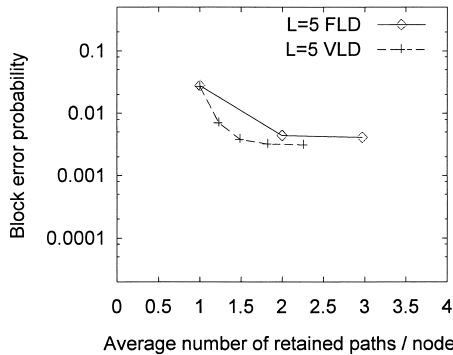


図 9 復号誤り確率とノード当りの平均リストサイズ
Fig. 9 Block error probability vs average list size. ($L = 5$, $E_0/N_0 = 5$ dB)

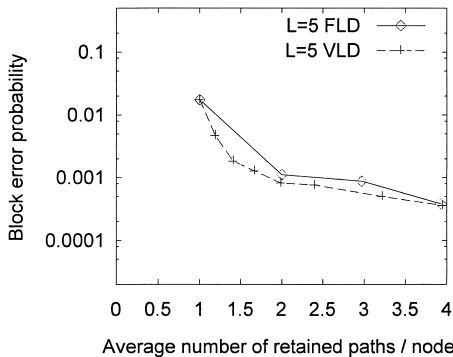


図 10 復号誤り確率とノード当りの平均リストサイズ
Fig. 10 Block error probability vs average list size. ($L = 5$, $E_0/N_0 = 6$ dB)

トサイズが大きくなるほど小さい誤り確率を達成している。しかしながら、図 8~ 図 10 において、VLD に対しては、最も右側のプロットよりも右側には有効

なしきい値が存在しない。したがって、VLD を適用できる範囲は限定され、その範囲は SN 比が大きいところほど広がる。しかし、VLD を用いた提案アルゴリズムを適用できる範囲では、リストサイズに対する誤り確率において、VLD を用いた復号法の性能が FLD を用いた復号法よりも優れる領域の存在が明らかになった。

5. む す び

従来の GVA には固定サイズのリスト復号器 (FLD) が用いられていたが、本論文では、リストサイズを確率変数にとりリスト復号器 (VLD) の適用を図るアルゴリズムの提案を行った。そして、提案アルゴリズムを木符号に用いたときの符号化定理を導出し、具体的符号化を用いてのシミュレーションを行った。シミュレーションにおいては、平均リストサイズに対する復号誤り確率を小さくする意味で、提案アルゴリズムの有効な領域の存在が明らかになった。

今後の課題として、提案アルゴリズムに対する計算量を理論的に明らかにすることが挙げられる。また、本論文におけるシミュレーションは、メモリを十分大きく用意した領域で行い、平均リストサイズに対する復号誤り確率という、最も基本的な尺度のみの評価しか行っていない。提案アルゴリズムでは、保持すべきパス本数を確率変数にとるため、メモリに制限を設けた場合のアルゴリズムの検討とその誤り確率の評価が必要と思われるが、これも今後の課題としたい。

文 献

- [1] T. Hashimoto, "A list-type reduced-constraint generalization of the Viterbi algorithm," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-33, no.6, pp.866-876, Nov. 1987.
- [2] J.B. Anderson and S. Mohan, "Sequential coding algorithms: A survey and cost analysis," IEEE Trans. Commun., vol.COM-32, no.2, pp.169-176, Feb. 1984.
- [3] H.Yamamoto and K.Itoh, "Vitebi decoding algorithm for convolutional codes with repeat request," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-26, no.5, pp.540-547, Sept. 1980.
- [4] T. Hashimoto, "On the error exponent of convolutionally coded ARQ," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.40, no.2, pp.567-575, March 1994.
- [5] G.D. Forney, Jr., "Exponential error bounds for erasure,list and decision feedback schemes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.14, no.2, pp.206-220, March 1968.
- [6] G.D. Forney, Jr., "Convolutional codes II : Maximum likelihood decoding," Inf. Control., vol.25, no.3, pp.222-266, July 1974.

- [7] A. Drukarev, "Hybrid ARQ error control using sequential decoding," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.23, no.4, pp.311-318, 1970.
- [8] C.E. Shannon, R.G. Gallager, and E.R. Berlekamp, "Lower bounds to error probability for coding for discrete memoryless channels," Inf. Control, vol.19, no.1, pp.65-103, 1967.
- [9] A.J. Viterbi and J.K. Omura, Principles of communication and coding, McGraw-Hill, NY, 1979.
- [10] R.G. Gallager, Information theory and reliable communication, Wiley, NY, 1968.
- [11] S. Lin and D.J. Costello, Error control coding: Fundamentals and applications, Prentice-Hall, NJ, 1983.
- [12] G.D. Forney, Jr., Concatenated codes, M.I.T., MA, 1966.
- [13] T. Hashimoto, "Composite scheme LR + Th for decoding with erasures and its effective equivalence to Forney's rule," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.45, no.1, pp.78-93, Jan. 1999.
- [14] 新家稔央, 松嶋敏泰, 平澤茂一, "木符号におけるリスト復号法を用いた判定帰還方式について," 信学論(A), vol.J83-A, no.1, pp.67-82, Jan. 2000.

付 録

ここでは, 主に補題 1 について [4] に沿った導出を示す^(注16)が, 補題 2 についても同様である.

補題 1 の証明

$$P_{ea} \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} \sum_{n=L}^{N+L-1} P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N)$$

であるから, はじめに $P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N)$ を評価する.

A を誤りパス, 全体の集合とする. 次式におけるインジケータ $\phi(\mathbf{y}^{vn})$ に対し, [4] と同様の上界を用いることにより, $P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N)$ は次のように押さえられる.

$$\begin{aligned} P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N) &\leq \sum_{\mathbf{y}^{vn}} Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn}) \cdot \phi(\mathbf{y}^{vn}) \\ &\leq \Delta^{S\sigma_x} \sum_{\mathbf{y}^{vn}} Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn}) \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_A \left[\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \right]^{\frac{\sigma_1}{\rho_1}} \right\}^{\rho_1} \quad (\text{A}\cdot 1) \end{aligned}$$

\sum_{A_2} を正しいパスからある時刻で分岐した誤りパスの集合, 更に, これらのあらゆる時刻に対する和を \sum_{A_1} で示せば, $\sum_A = \sum_{A_1} \sum_{A_2}$ である.

$0 \leq \rho_1 \leq 1$ と制約を設ければ, $(\sum_i a_i)^\rho \leq \sum_i a_i^\rho$, $0 \leq \rho \leq 1$ より, 式 (A.1) は,

$$P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N) \leq \Delta^{\sigma_1} \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}^{vn}} Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})$$

$$\left\{ \sum_{A_2} \left[\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \right]^{\frac{\sigma_1}{\rho_1}} \right\}^{\rho_1} \quad (\text{A}\cdot 2)$$

で押さえられる. 次に, 式 (A.2) のパスに対するゆう度をブランチに対するゆう度の積で書き換える. すなわち,

$$Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn}) = \prod_{t=1}^n Pr(\mathbf{y}_t^v | \mathbf{x}_{i,t}^v),$$

$$\sum_{\mathbf{y}^{vn}} = \sum_{\mathbf{y}_1^v} \sum_{\mathbf{y}_2^v} \cdots \sum_{\mathbf{y}_n^v}$$

であり, 更に, パス i の第 t ブランチに対するゆう度を $P_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} Pr(\mathbf{y}_t^v | \mathbf{x}_{i,t}^v)$ と略記すれば, 式 (A.1) は, 以下のように書ける.

$$\begin{aligned} P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N) &\leq \Delta^{\sigma_1} \cdot \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}_{t_1+1}^v} \cdots \sum_{\mathbf{y}_{t_2}^v} \prod_{t=t_1+1}^{t_2} \\ &\quad P_0(t)^{1-\sigma_1} \cdot \left\{ \sum_{A_2} P_i(t)^{\frac{\sigma_1}{\rho_1}} \right\}^{\rho_1} \quad (\text{A}\cdot 3) \end{aligned}$$

特定の木符号についてこれ以上は解析できないので, ランダム符号化を施す. すなわち, 以下では, ブランチごとに独立に, かつ, 各々のブランチの v 個の入力アルファベットに対し, 確率分布 $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, \dots, q_{a-1}\}$ に従って, 独立にシンボルを割り付けたときのあらゆる木符号に対する平均を解析する. この平均を $E[\cdot]$, 及び, $\bar{\cdot}$ で表すことにする.

$E[x^\rho] < [E(x)]^\rho$, $0 \leq \rho \leq 1$, 及び, 分岐したパス同士でブランチごとに符号語が独立であることを用い, 式 (A.3) は,

$$\begin{aligned} \overline{P_{ea,n}} &\leq \Delta^{\sigma_1} \cdot \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}_{t_1+1}^v} \cdots \sum_{\mathbf{y}_{t_2}^v} \\ &\quad \prod_{t=t_1+1}^{t_2} \overline{P_0(t)^{1-\sigma_1}} \left\{ \sum_{A_2} \overline{P_i(t)^{\frac{\sigma_1}{\rho_1}}} \right\}^{\rho_1}. \quad (\text{A}\cdot 4) \end{aligned}$$

上式で, $P_k(t)$ は, もはや, k に依存してないので, 以下では, $P(t)$ と書く.

次に, [1] p.874 lemma A-1 より, 分岐点からの長さ (ブランチ数) を, $n_1 = t_2 - t_1$ とおけば, A_2 の要素

(注16): [4] では, ランダムに符号化したブロック符号に対してのみ利用できる厳しい上界式を得ているが, これは本論文においては適用できない. これは [4] において畳込み符号を用いた場合と同様で, ここではユニオン上界の算出を行う.

は, $|A_2| \leq e^{[n_1 - (L-1)]vR}$ で押さえられるので,

$$\begin{aligned} &\leq \Delta^{\sigma_1} \cdot \sum_{A_1} e^{\rho_x n_1 v R} \\ &\cdot \prod_{t=t_1+1}^{t_2} \left[\sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P(t)^{1-\sigma_x} P(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}}} \right] \quad (\text{A}\cdot 5) \end{aligned}$$

更に, 一つのブランチに対する符号語についても, シンボルごとの符号化は独立であるので,

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P(t)^a} \left(\overline{P(t)^b} \right)^c \\ &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_v} \\ &\left(\sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_v} q_{i_1} P_{j_1 i_1}^a \cdots q_{i_v} P_{j_v i_v}^a \right) \\ &\cdot \left(\sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_v} q_{i_1} P_{j_1 i_1}^b \cdots q_{i_v} P_{j_v i_v}^b \right)^c \\ &= \left\{ \sum_j \left(\sum_i q_i P_{ji}^a \right) \left(\sum_i q_i P_{ji}^b \right)^c \right\}^v \end{aligned}$$

を用いると, 式 (A.4) は,

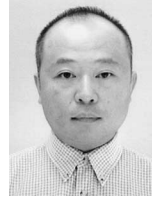
$$\begin{aligned} \overline{P_{ea,n}} &\leq \Delta^{\sigma_1} \cdot \sum_{A_1} e^{[n_1 - (L-1)]vR\rho_1} \\ &\cdot \left[\sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-\sigma_1} \right) \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\frac{\sigma_1}{\rho_1}} \right)^{\rho_1} \right]^{vn_1}, \\ &0 \leq \rho_1 \leq 1, \quad \sigma_1 \geq 0. \quad (\text{A}\cdot 6) \end{aligned}$$

と書ける. A_1 についての和は, $\sum_{A_1} = \sum_{\{n \geq n_1 \geq L\}}$ であるので, 次の上界式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \overline{P_{ea,n}} &\leq e^{-(L-1)vR\rho_1} \cdot \Delta^{\sigma_1} \sum_{n_1=L}^{\infty} \\ &\left[e^{\rho_1 R} \sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-\sigma_1} \right) \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\frac{\sigma_1}{\rho_1}} \right)^{\rho_1} \right]^{vn_1} \quad (\text{A}\cdot 7) \end{aligned}$$

$E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \rho_1 R > 0$ と制約をつければ, 式 (A.7) の無限等比級数が収束し, 補題 1 が得られる.

(平成 13 年 12 月 28 日受付, 15 年 3 月 14 日再受付,
9 月 4 日最終原稿受付)



新家 稔央 (正員)

昭 63 早大・理工・工業経営卒, 平 2 同大理工学研究科修士課程了, 平 2 同博士後期課程入学, 平 5 同中退. 平 3 早大理工学部助手, 平 7 早大理工総研嘱託研究員, 湘南工大, 職業能力開発大非常勤講師. 平 10 神奈川工科大電気電子工学科助手. 平 12 同大情報ネットワーク工学科助手. 情報理論, 特に通信路符号化について興味をもつ. 情報理論とその応用学会, IEEE 各会員.



松嶋 敏泰 (正員)

昭 53 早大・理工・工業経営卒. 昭 55 同大大学院修士課程了. 同年, 日本電気(株)入社. 昭 61 早大・理工学研究科・博士後期課程入学. 平 1 横浜商科大学講師. 平 3 同大助教授. 平 4 早大・理工学部・工業経営学科(現在経営システム工学科)助教授, 平 9 同大教授, 現在に至る. 知識情報処理及び情報理論とその応用に関する研究に従事. 工博, IEEE, 情報理論とその応用学会, 人工知能学会, 情報処理学会, OR 学会, 日本経営工学会等各会員.



平澤 茂一 (正員)

昭 36 早大・理工・数学卒. 昭 38 同電気通信卒. 同年三菱電機(株)入社. 昭 56 早大・理工・工業経営学科(現在経営システム工学科)教授, 現在に至る. 情報理論とその応用, データ伝送方式, 並びに計算機応用システムの開発などの研究に従事. 工博. 昭 54 UCLA 計算機科学科客員研究員. 昭 60 ハンガリー科学アカデミー, 昭 61 伊トリエステ大学客員研究員. 平 5 電子情報通信学会小林記念特別賞, 業績賞受賞. IEEE Fellow, 情報理論とその応用学会, 人工知能学会, 情報処理学会, OR 学会, 日本経営工学会等各会員.