

# 記憶のある通信路に対する低密度パリティ検査符号の復号性能の解析 Analysis of Decoding Performance of Low-Density Parity-Check Codes for Channels with Memory

細谷 剛\*  
Gou Hosoya

八木 秀樹\*  
Hideki Yagi

平澤 茂一\*  
Shigeichi Hirasawa

**Abstract**— In recent years, the combination of Low-Density Parity-Check (LDPC) codes and iterative decoding algorithms has been paid remarkable attentions of their high performance in decoding errors and low complexity of decoding. Some iterative decoding algorithms for channels with memory, such as burst error channels, have been widely studied as well as for memoryless channels. However, analysis of decoding performance of LDPC has often assumed to be memoryless. In this paper, we derive an evaluation method of the bit flip decoding algorithm for the Gilbert channels using the Gallager's evaluation method for the binary symmetric channel.

**Keywords**— LDPC codes, burst error channels, bit flip decoding

## 1 はじめに

近年, LDPC 符号と繰り返し復号法の組み合わせは高い復号を少ない計算時間で実行でき [1], 注目を浴びている. 従来より, LDPC 符号に関する近年の研究の多くの成果は, 雑音発生が独立な通信路を仮定しているが, パースト誤り通信路に対する LDPC 符号と繰り返し復号法も多くの研究がある [2], [5], [6]. しかし, 復号性能の解析については依然として雑音の独立性が仮定されていることが多い.

そこで, 本研究ではビット反転復号法に対して, 従来 2 元対称通信路における復号誤り確率の導出法 [1] を利用して, Gilbert 通信路における復号誤り確率の評価式を導く.

## 2 準備

### 2.1 LDPC 符号 [1]

本論文では 2 元 LDPC 符号について考える. 2 元 LDPC 符号は, 検査行列  $H$  に含まれる要素 1 が非常に少ない (疎な) 符号であり, 検査行列の要素は殆ど 0 で構成され, 要素 1 は確率的に配置される. ここで検査行列とは長さ  $N$  の任意の符号語  $c = (c_1, c_2, \dots, c_N) \in \{0, 1\}^N$  に対し

$$cH^T = 0, \quad (1)$$

を満たす行列であり, 符号を一意に定める. 疎な検査行列の各行の重みと各列の重みがそれぞれ一定となるように構成される符号を正則 LDPC 符号という. 本研究では正則 LDPC 符号を対象とし, 以降単に LDPC 符号と呼ぶことにする.  $(N, w_r, w_c)$  LDPC 符号は符号長  $N$ , 行重み  $w_r$ , 列重み  $w_c$  を持つ  $M \times N$  の検査行列  $H$  によって与えられる. 式 (1) は LDPC 符号の任意の符号語が  $M$  個の方程式 (以下パリティ検査方程式) を同時に満たさなければならないことを示している. ここで,  $\rho \triangleq N/w_r$  と定義すると,  $\rho = M/w_c$  が成り立つ. さらに, 符号化率  $R$  は  $R \geq 1 - w_c/w_r$ , 検査行列  $H$  の行数は  $M = w_c \rho$  である. また, パラメータ  $(N, w_r, w_c)$  は  $w_c \geq 3, w_r > w_c, Nw_c \bmod w_r = 0$ , をそれぞれ満足するように決定される.

R.G.Gallager によって示された LDPC 符号の構成法について述べる. この構成法によって得られる検査行列  $H_G = [H_{Gmn}]$ ,  $m \in [1, M]$ ,  $n \in [1, N]$ , は  $w_c$  個の  $\rho \times N$  部分行列  $H_G^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, w_c$ , から成り, 次式のように構成される. ここで,  $N \bmod w_r = 0$  とする.

$$H_G = \begin{bmatrix} H_G^{(1)} \\ H_G^{(2)} \\ \vdots \\ H_G^{(w_c)} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

それぞれの部分行列  $H_G^{(i)}$  の各列重みを 1, また各行重みを  $w_r$  に固定する. 結果として  $H_G$  の各列の重みは  $w_c$  となる. 部分行列  $H_G^{(1)}$  において, 1 行目の 1 列目から  $w_r$  列目までの要素を 1 とする. 2 行目に対しては,  $w_r + 1$  列目から  $2w_r$  列目までの要素を 1 とする. 同様に  $\rho$  行目には,  $(\rho - 1)w_r + 1$  列目から  $\rho w_r$  列目までの要素を 1 とする. すなわち,  $H_G^{(1)}$  の  $i$  行  $j$  列成分を  $H_{Gij}^{(1)}$  で表すと,  $i = 1, 2, \dots, \rho$  に対し

$$H_{Gij}^{(1)} \triangleq \begin{cases} 1, & j \in [(i-1)w_r + 1, iw_r]; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3)$$

となる. 部分行列  $H_G^{(i)}$ ,  $2 \leq i \leq w_c$ , は, 部分行列  $H_G^{(1)}$  の列を置換することにより得られる.

### 2.2 Gilbert 通信路 [3]

Gilbert 通信路は記憶のある通信路であり, パースト誤りを発生する. 本論文では LDPC 符号の符号語  $c = (c_1, c_2, \dots, c_N) \in \{0, 1\}^N$  が通信路を介して送信されると仮定する. また  $c$  に Gilbert 通信路に従う加法的雑音  $z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \{0, 1\}^N$  が加わり, 受信側において受信語  $y = c \oplus z$  を受けとるものとする<sup>1</sup>. 受信側では受信語  $y$  から送信された符号語  $c$  を推定する. Gilbert 通信路は, 状態集合  $S = \{G, B\}$  の隠れマルコフモデルであり, 2 つのパラメータ (状態遷移確率, 各状態における誤り確率) により定義される. 状態  $r \in S$  から  $s \in S$  に遷移する状態遷移確率を  $p(s|r)$  とする. 定常性を仮定したとき, Gilbert 通信路は定常分布  $\pi = (\pi_G, \pi_B)$  を持つ. 通信路からは, 時点  $n = 1, 2, \dots, N$  で状態遷移系列  $s = (s_0, s_1, \dots, s_N)$  に従い  $z_n \in \{0, 1\}$  が出力される. ただし, 初期状態分布は定常分布とする. すなわち,  $\Pr(s_0) = \pi_{s_0}$  である. 状態  $s_{n-1}$  から状態  $s_n$  に遷移するとき, 誤りが発生する確率を  $P_{s_n}$  とする. ただし, Gilbert 通信路では状態  $G$  に遷移する際,  $P_G = 0$  である. このような記憶のある通信路を仮定することで, ある時点で滞在している状態によって, 誤る確率が変化する.

また, Gilbert 通信路の平均誤り確率  $p_{ave}$  は以下の式で求めることができる.

$$p_{ave} = \sum_{r \in S} \pi_r P_r. \quad (4)$$

## 3 2 元対称通信路に対するビット反転 (BF) 復号法の復号性能の解析 [1]

### 3.1 BF 復号法

BF 復号法は繰り返し型復号法であり, 通信路は 2 元対称通信路 (BSC) を仮定している. いま, 検査行列  $H = [H_{mn}]$  に対して次の 2 つの集合を定義する.

$$A(m) \triangleq \{n : H_{mn} = 1\}, \quad B(n) \triangleq \{m : H_{mn} = 1\}.$$

以下に BF 復号法を示す. ここで,  $l_{max}$  は最大繰り返し回数を表す.

[BF 復号法]

- b1)  $H_{mn} = 1$  となる  $(m, n)$  に対して  $r_{mn} := y_n$  とする. 繰り返し数  $l := 1$  とする.
- b2)  $H_{mn} = 1$  となる  $(m, n)$  に対して, 次式で  $v_{mn}$  を更新する.

$$v_{mn} := \sum_{n' \in A(m) \setminus n} r_{mn'} \bmod 2. \quad (5)$$

<sup>1</sup>  $\oplus$  は排他的論理和を表す.

\* 〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学理工学部経営システム工学科 Dept. of Industrial and Management Systems Engineering, School of Science and Engineering, Waseda University, Okubo 3-4-1, Shinjuku-ku, Tokyo, 169-8555 Japan. E-mail: hosoya@hirasa.mgmt.waseda.ac.jp

時点 $i$	0	1	2	3
$A(m, n)$		1	4	6

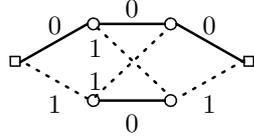


図 1: BSC における偶数重みトレリスの一例  
偶数重みのパスは 000, 011, 101, 110 となる。

- b3)  $H_{mn} = 1$  となる  $(m, n)$  に対して, 以下のように  $r_{mn}$  を更新する.
- $\forall m' \in B(n) \setminus m$  に対して, もし  $v_{m'n} = a$  ならば,  $r_{mn} := a$  とする.
  - それ以外の場合,  $r_{mn} := y_n$  とする.
- b4)  $\hat{c} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_N)$  を以下のように求める.
- $\forall m \in B(n)$  に対して, もし  $v_{mn} = a$  ならば,  $\hat{c}_n := a$  とする.
  - それ以外の場合,  $\hat{c}_n := y_n$  とする.
- b5) もし,  $l = l_{max}$  または  $\hat{c}H^T = 0$  ならば,  $\hat{c}$  を推定符号語として出力し, アルゴリズムを終了する. それ以外の場合は,  $l := l + 1$  として b2) へ行く.

### 3.2 BF 復号法による復号性能の解析

Gallager はパラメータ  $(w_r, w_c)$  の LDPC 符号に対して, BSC を仮定して BF 復号を行う際の復号誤り率の計算方法を導いている [1]. 以下, 全零の符号語を送信し, 誤り率  $p$  の BSC で BF 復号を行ったと仮定する.

復号誤り率を評価するためには注目する  $(m, n)$  が, (1) b2) において,  $r_{mn} = c_n$  であり, b3) で  $r_{mn} = c_n \oplus 1$  と判定される確率, (2) b2) において,  $r_{mn} = c_n \oplus 1$  であり, b3) で  $r_{mn} = c_n$  と判定される確率を評価する必要がある. そのためには, b2) において検査方程式に属する他の  $w_r - 1$  ビットの重みの和が偶数重みか奇数重みになる確率を計算すればよい. 注目するビット以外の  $w_r - 1$  ビットが偶数重みである確率の計算は, 図 1 に示すような偶数重みトレリスを用いて容易に行うことができる. 偶数重みトレリスを構成するために,  $m$  番目の検査方程式に対する列番号インデックス  $A(m, n)$  を次式のように定義する.

$$A(m, n) \triangleq \{n' : H_{mn} = 1, n' \neq n\} \\ = \{n_1^{(m, n)}, n_2^{(m, n)}, \dots, n_{w_r-1}^{(m, n)}\}. \quad (6)$$

BSC では, 通信路の雑音発生は独立であるため,  $A(m, n)$  の要素によらず偶数重みトレリスの長さは  $w_r - 1$  で, 符号ノード間を結ぶ枝から構成される. 符号ノードは時点 0 から時点  $w_r - 1$  までであり, 時点  $i, i = 0, 1, \dots, w_r - 2$  のノードと時点  $i + 1$  の符号ノードは枝で結ばれる. 各枝には, 0 または 1 がラベル付けされ, ラベルに対応する雑音の発生確率が割り当てられる. つまり, ラベルが 0 の場合は  $p - 1, 1$  の場合は  $p$  が割り当てられる. また, 始点ノードから終端ノードまで至る経路をパスと呼ぶ. 偶数重みトレリスでは, パス中の全枝のラベルの排他的論理和は 0 である. 時点 0 から順に時点  $w_r - 1$  まで前向き計算 [5] を行うことで, 注目するパリティ検査方程式において偶数重みのパスが発生する確率を求めることができる.

図 1 に,  $w_r = 4, A(m, n) = \{1, 4, 6\}$  の場合における偶数重みトレリスの例を示す. ここで, 実線の枝はラベルが 0, 破線の枝はラベルが 1 である. この例では偶数重みの確率は  $\{1 + (1 - 2p)^3\}/2$  となる.

BF 復号の  $l$  回目の繰り返しにおける復号誤り率  $p^{(l)}$ ,  $l \geq 1$ , は次式によって与えられる. ただし,  $p^{(0)} = p$  とする.

$$p^{(l)} = p^{(0)} + (1 - p^{(0)}) \left[ \frac{1 + (1 - 2p^{(l-1)})^{w_r-1}}{2} \right]^{w_c-1} \\ - p^{(0)} \left[ \frac{1 - (1 - 2p^{(l-1)})^{w_r-1}}{2} \right]^{w_c-1}. \quad (7)$$

時点 $k$	0	$k_1$	$k_1 + 1$	$k_1 + 2$	$k_2$	$k_2 + 1$	$K$
$A(m, n)$		1	*	*	4	*	6

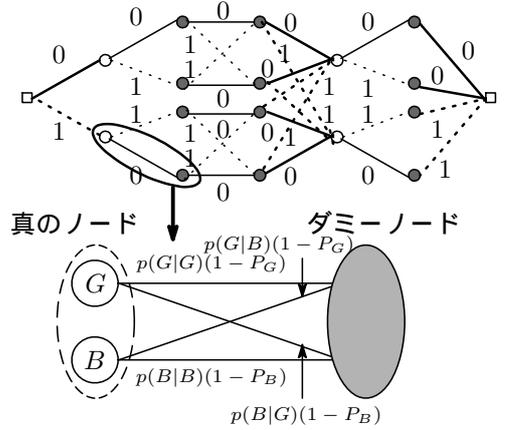


図 2: Gilbert 通信路における合成トレリスの一例  
ここでは,  $w_r = 4, K = 6$  とする.

ここで  $p < p^*$  を満足する  $p$  に対して,  $\lim_{l \rightarrow \infty} p^{(l)} = 0$  となるとき,  $p^*$  をパラメータ  $(w_r, w_c)$  の LDPC 符号に対する通信路の誤り率の上限とする. すなわち,  $p < p^*$  を満足する誤り率  $p$  の 2 元対称通信路に対しては, 十分な繰り返し回数の復号を行うことで, 復号誤り率が 0 に収束することを示している.

## 4 パースト誤り通信路における要素間距離による復号性能の解析

パースト誤り通信路に対する LDPC 符号で BF 復号法を行った場合の復号誤り率を要素間距離<sup>2</sup>を考慮に入れて解析を行う.

### 4.1 合成トレリスの構成法

式 (7) の右辺の第 2 項では, 検査行列全体の奇数重みの確率を, 第 3 項ではその偶数重みの確率を計算をしている. BSC を仮定した場合, 各ビットごとの雑音発生が独立であるため, 長さ  $w_r - 1$  の偶数重みトレリスを用いることで, 容易に偶数重みと奇数重みの確率を計算することができた. ここで, Gilbert 通信路で  $H_{mn} = 1$  となる  $(m, n)$  に注目して, 第  $m$  パリティ検査方程式の偶数重みと奇数重みの計算を行うため, Gilbert 通信路の状態遷移を考慮に入れた合成トレリス [4] を用いる. ここで, 符号ノードは Gilbert 通信路の 2 つの状態から成り,  $n' \in A(m, n)$  ビット目に対応する符号ノードを真のノードと呼ぶ. ただし, BSC とは異なり各ビットの雑音発生が独立でないため, パリティ検査方程式の要素 1 (真のノード) 同士を直接枝でつなげることはできない. そこで, 要素間距離を考慮に入れ, 真のノードと真のノードの間が 2 以上のとき, 真ノードの間に 要素間距離 - 1 時点分のダミーノードを用意する. ダミーノードも通信路状態を含む. また, 各枝には 0 と 1 のラベルと, ノード間の通信路状態の遷移と遷移確率に対応する誤り率を割り当てられる. ダミーノードでは任意の重みを考慮する必要があるため, パスに関係なく “0” と “1” を枝のラベルとして持つと考えられる. すなわち, ダミーノードからは 2 本の枝が出る. そして, BSC と同様に, 始点ノードから終端ノードまで順に前向き計算を行うことで偶数重みのパスの確率を求める.

図 2 に,  $w_r = 4, A(m, n) = \{1, 4, 6\}$  の場合における Gilbert 通信路における合成偶数重みトレリスを示す. 図 1 と同様, 実線の枝はラベルが 0, 破線の枝はラベルが 1 である. また, 太線の枝は真のノードに接続し, 細線の枝はダミーノードに接続する. 白ノードは符号ノードを表し, 灰色ノードはダミーノードを表す.

合成トレリスの長さは  $K \triangleq n_{w_r-1}^{(m, n)} - n_1^{(m, n)} + 1$  である. 時点 0 は始点ノード, 時点  $K$  は終端ノードであり, 状態数は通信路状態の数に等しい  $|S| = 2$  である. また, 時点  $k_1 \triangleq 1, k_2 \triangleq n_2^{(m, n)} - n_1^{(m, n)} + 1, \dots, k_{w_r-2} \triangleq n_{w_r-2}^{(m, n)} - n_1^{(m, n)} + 1,$

<sup>2</sup> 各々のパリティ検査方程式の要素 “1” 同士の距離を要素間距離とする [6].

における真のノードは、通信路状態と符号シンボルの数の積に等しいため、状態数が  $q|\mathcal{S}|$  である。ただし、 $q$  は符号シンボルの数を表し、本論文では  $q = 2$  のみを扱うため、 $q|\mathcal{S}| = 4$  となる。それ以外の時点のノードはダミーノードであり、真ノードの状態数と符号シンボルの数の積に等しいため、状態数は  $q^2|\mathcal{S}| = 8$  となる。

#### 4.2 合成トレリスを用いた評価値の計算

4.1 節で構成された合成トレリスを用いて、 $H_{mn} = 1$  となる  $(m, n)$  が属する検査方程式の  $w_r - 1$  ビットの偶数重みの確率を計算する方法について述べる。評価値は、左端の始点ノードから順に右端の終端ノードまで前向き確率の計算を行う。まず、始点ノードの評価値を  $s \in \mathcal{S}$  について

$$\alpha_0^{(s)} = \pi_s, \quad (8)$$

とする。また、 $r = 1, 2, \dots, w_r - 1$ ,  $s \in \mathcal{S}$ ,  $a \in \{0, 1\}$ 、に対し  $\alpha_{k_r}^{(s,a)}$  は時点  $k_r$  で状態  $s$  に滞在し、パスの重みの排他的論理和が  $a$  である真のノードの評価値を表すものとする。ここで、真のノード評価値を導くために、まずダミーノードの評価値の計算方法について述べる。 $\gamma = 1, 2, \dots, w_r - 2$  に対し  $\delta_\gamma \triangleq k_{\gamma+1} - k_\gamma \geq 2$  の場合はダミーノードにおける評価値の計算を行う。ここで、 $\Delta_k^{(s,a,b)}$  は、時点  $k$  で状態  $s$  に滞在し、パス上の真のノードの重みの排他的論理和が  $a$  で、時点  $k_\gamma + 1$  から時点  $k$  までのパスの重みの排他的論理和が  $b$  である評価値を表す。 $k = k_r, k_r + 1$  における評価値を次式で示す。

$$\begin{aligned} \Delta_{k_\gamma}^{(s,a)} &= \alpha_{k_\gamma}^{(s,a)}, & k &= k_\gamma, \\ \Delta_{k_\gamma+1}^{(s,a,b)} &= \sum_{r \in \mathcal{S}} \Delta_{k_\gamma}^{(s,a)} p(s|r)(1 - P_s)^{b \oplus 1} P_s^b, \\ & & k &= k_\gamma + 1. \end{aligned} \quad (9)$$

次に、 $k = k_\gamma + 2, \dots, k_{\gamma+1} - 1$ ,  $\delta_\gamma \geq 3$ 、におけるダミーノードの評価値を示す。

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(s,a,0)} &= \sum_{b \in \{0,1\}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \Delta_{k-1}^{(s,a,b)} p(s|r)(1 - P_s)^{b \oplus 1} P_s^b, \\ \Delta_k^{(s,a,1)} &= \sum_{b \in \{0,1\}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \Delta_{k-1}^{(s,a,b)} p(s|r)(1 - P_s)^b P_s^{b \oplus 1}. \end{aligned} \quad (10)$$

$k = k_{\gamma+1}$  において、真のノードの評価値は式 (9), (10) を用いることにより、

$$\begin{aligned} \alpha_{k_{\gamma+1}}^{(s,0)} &= \sum_{a \in \{0,1\}} \sum_{b \in \{0,1\}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \Delta_{k_{\gamma+1}-1}^{(s,a,b)} p(s|r)(1 - P_s)^{a \oplus 1} P_s^a, \\ \alpha_{k_{\gamma+1}}^{(s,1)} &= \sum_{a \in \{0,1\}} \sum_{b \in \{0,1\}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \Delta_{k_{\gamma+1}-1}^{(s,a,b)} p(s|r)(1 - P_s)^a P_s^{a \oplus 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

と求められる。

また、 $\delta_\gamma = 1$  の場合は真のノード  $\alpha_{k_{\gamma+1}}^{(s,a)}$  と  $\alpha_{k_\gamma}^{(s,a)}$  の間にダミーノードは存在しないため、直接真のノードの評価値の計算を次式で行う。

$$\begin{aligned} \alpha_{k_{\gamma+1}}^{(s,0)} &= \sum_{a \in \{0,1\}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \alpha_{k_\gamma}^{(s,a)} p(s|r)(1 - P_s)^{a \oplus 1} P_s^a, \\ \alpha_{k_{\gamma+1}}^{(s,1)} &= \sum_{a \in \{0,1\}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \alpha_{k_\gamma}^{(s,a)} p(s|r)(1 - P_s)^a P_s^{a \oplus 1}. \end{aligned} \quad (12)$$

最終的に、時点  $K$  で  $H_{mn} = 1$  となる  $(m, n)$  に対する検査方程式の偶数重みの確率  $P_{even}(m, n)$  の計算を行う。もし、 $\delta_{w_r-2} \geq 2$  の場合は

$$\begin{aligned} P_{even}(m, n) &= \sum_{a \in \{0,1\}} \sum_{b \in \{0,1\}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \Delta_{K-1}^{(s,a,b)} p(s|r) \\ &\quad \cdot (1 - P_s)^{a \oplus 1} P_s^a, \end{aligned} \quad (13)$$

である。それ以外の場合は、

$$P_{even}(m, n) = \sum_{a \in \{0,1\}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \alpha_{K-1}^{(s,a)} p(s|r)(1 - P_s)^{a \oplus 1} P_s^a, \quad (14)$$

とする。また、時点  $K$  で  $H_{mn} = 1$  となる  $(m, n)$  に対する検査方程式の奇数重みの確率  $P_{odd}(m, n)$  は

$$P_{odd}(m, n) = 1 - P_{even}(m, n), \quad (15)$$

により求められる。

#### 4.3 Gilbert 通信路における復号誤り確率の計算

4.2 節で計算した  $H_{mn} = 1$  となる  $(m, n)$  に対する検査方程式の偶数重みの確率と奇数重みの確率を用いて、Gilbert 通信路における BF 復号を行った場合の復号誤り確率を求める。 $P_{even}(m, n)$  と  $P_{odd}(m, n)$  はそれぞれ  $H_{mn} = 1$  となる各々の  $(m, n)$  について計算したので、全体では  $Mw_r$  個求まる。検査行列全体の偶数重みの確率と奇数重みの確率を求めるためには、 $P_{even}(m, n)$  と  $P_{odd}(m, n)$  の平均とすれば良い。

以上により、式 (7) と同様に繰り返し  $l \geq 1$  回目の復号誤り確率  $p_{ave}^{(l)}$  は

$$\begin{aligned} p_{ave}^{(l)} &= p_{ave}^{(0)} - p_{ave}^{(0)} \left[ \frac{\sum \sum P_{even}(m, n)}{Mw_r} \right]^{w_c-1} \\ &\quad + (1 - p_{ave}^{(0)}) \left[ \frac{\sum \sum P_{odd}(m, n)}{Mw_r} \right]^{w_c-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

となる。

式 (16) より、繰り返し回数  $l$  に従い、再帰的に平均復号誤り確率  $p_{ave}^{(l)}$  を計算できる。しかし、Gilbert 通信路の場合、平均復号誤り確率  $p_{ave}^{(l)}$  は状態遷移確率と各々の状態における誤り発生確率によって、式 (4) で決定される。そこで、繰り返し回数  $l$  ごとに  $p_{ave}$  が変化した場合、それにあわせて仮想的な Gilbert 通信路のパラメータも変化させる。状態遷移確率によって生成される状態遷移系列  $s$  は繰り返し回数  $l$  とは無関係であるので、各々の状態における誤り発生確率  $P_s$  を変化させれば良い。

いま  $P_G^{(l)}$  と  $P_B^{(l)}$  はそれぞれ繰り返し  $l$  回目における仮想 Gilbert 通信路の状態  $G$  と  $B$  の誤り発生確率を表すものとする。まず、繰り返し前における Gilbert 通信路のパラメータの初期値を次式で示す。

$$\begin{aligned} P_G^{(0)} &= P_G, P_B^{(0)} = P_B, \\ p_{ave}^{(0)} &= \pi_G P_G^{(0)} + \pi_B P_B^{(0)}. \end{aligned} \quad (17)$$

式 (16) の第 2 項は、 $p_{ave}^{(0)}$  と比較して復号を行うことで誤りが減少した確率、第 3 項は誤りが増加した確率を表す。このうち、誤りが増加した確率は通信路の状態に関係なく発生すると考えられる。また、 $P_G^{(0)} = P_G = 0$  であるので、繰り返し  $l \geq 1$  回目における状態  $G$  において誤りが発生する確率  $P_G^{(l)}$  は

$$P_G^{(l)} = (1 - p_{ave}^{(0)}) \left[ \frac{\sum \sum P_{odd}(m, n)}{Mw_r} \right]^{w_c-1}, \quad (18)$$

となる。 $p_{ave}^{(l)}$  は式 (16) で求められているので、繰り返し  $l \geq 1$  回目における状態  $B$  において誤りが発生する確率  $P_B^{(l)}$  は、式 (4) より

$$P_B^{(l)} = \frac{p_{ave}^{(l)} - \pi_G P_G^{(l)}}{\pi_B}, \quad (19)$$

で計算できる。

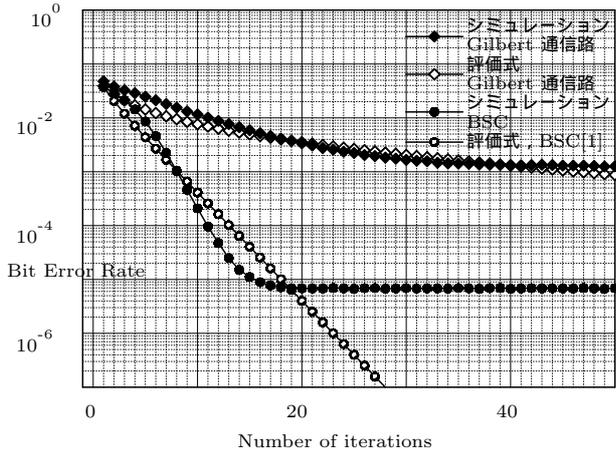


図 3:  $p_{ave} = 0.07$ ,  $L_{Burst} \approx 8.34$ ,  $P_G = 0$ ,  $P_B = 0.5$

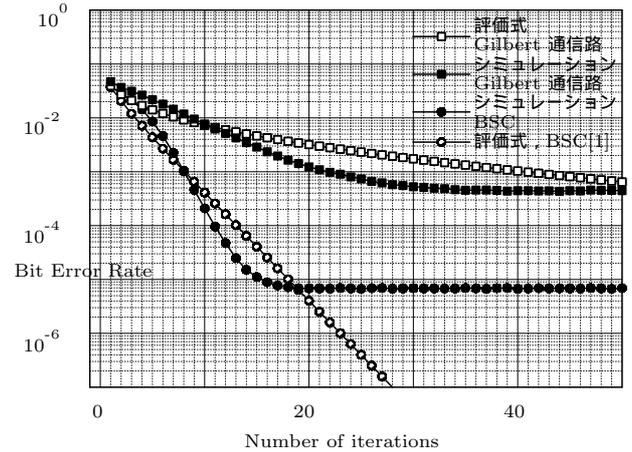


図 4:  $p_{ave} = 0.07$ ,  $L_{Burst} \approx 3.61$ ,  $P_G = 0$ ,  $P_B = 0.5$

## 5 数値計算

### 5.1 条件

提案した評価式の有効性を示すため、計算機シミュレーションとの比較を行った。

Gallager による構成法で得られる  $(N, 4, 3)$  LDPC 符号の検査行列に対して、合成 (偶数重み) トレリスを用いて復号誤り確率を計算する。しかし、合成トレリスとダミーノードを用いた偶数重みの計算は、多大な計算量を要する。そこで、第 1 部分行列は合成トレリスを用いて計算を行い、第 2, 3, ...,  $w_c$  部分行列については要素間距離が十分大きいものと考え、BSC に対する偶数重み計算を用いて復号誤り確率の近似計算を行う。ここで用いる復号誤り確率を次式で示す。

$$\begin{aligned}
 p_{ave}^{(l)} = & p_{ave}^{(0)} - p_{ave}^{(0)} \left[ \frac{\sum \sum P_{even}(m, n)}{Mw_r} \right. \\
 & + (w_c - 1) \frac{1 + (1 - 2p_{ave}^{(l-1)})^{w_r - 1}}{2w_c} \left. \right]^{w_c - 1} \\
 & + (1 - p_{ave}^{(0)}) \left[ \frac{\sum \sum P_{odd}(m, n)}{Mw_r} \right. \\
 & + (w_c - 1) \frac{1 - (1 + 2p_{ave}^{(l-1)})^{w_r - 1}}{2w_c} \left. \right]^{w_c - 1}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

シミュレーションには、パラメータが  $(10000, 4, 3)$  LDPC 符号を用いて BF 復号を行った。シミュレーションは、符号語を 10000 回、もしくは復号失敗回数が 50 回になるまで行った。

評価式による結果とシミュレーションによる結果について、Gilbert 通信路の平均誤り確率は  $p_{ave} = 0.07$ 、状態  $B$  における誤り発生確率は  $P_B = 0.5$  に固定し、図 3 に平均バースト長が  $L_{Burst} \approx 8.34$  の結果を、図 4 に  $L_{Burst} \approx 3.61$  の結果を示す。評価式は、式 (7) の BSC に対する評価式と式 (20) の Gilbert 通信路に対する評価式を示す。式 (7) では、誤り発生確率の初期値は  $p^{(0)} = p_{ave}$  とする。また、式 (20) では、誤り発生確率の初期値は  $p_{ave}^{(0)} = p_{ave}$  とする。シミュレーションは、誤り発生確率  $p = p_{ave}$  の BSC と、Gilbert 通信路の復号結果を示す。図 3 と図 4 は、横軸に繰り返し回数を、縦軸にビット単位の復号誤り確率 (BER) をとる。

### 5.2 結果と考察

#### (1) BSC

まず、従来の式 (7) と BSC におけるシミュレーションによる復号結果を比較する。式 (7) の場合、繰り返し回数が増えるにつれて BER が減少していく。シミュレーション結果は BER が約  $10^{-5}$  までは式 (7) と同様の振る舞いをするが、その後は繰り返し回数が増えても BER は変わらないことがわかる。これは、評価式の場合、検査行列に本来存在するループの

影響を考慮していないからと考えられる [1]。

#### (2) Gilbert 通信路

次に、提案した式 (20) と Gilbert 通信路におけるシミュレーション結果を比較する。最初に図 3 を見る。提案した式 (20) の場合、通信路状態を考慮した合成トレリスとダミーノードを用いて復号誤り確率の計算を行っているため、シミュレーション結果と式 (20) はかなり類似した振る舞いをする。しかし、図 4 のように必ずしも式 (20) がシミュレーション結果と同じ振る舞いをするとは限らない。これは、ループの他に式 (20) の評価式は、検査行列の第 2 部分行列以降は従来の BSC と同様の計算を行っているため、必ずしも Gilbert 通信路での復号結果を捉えていないためだと考えられる。式 (16) の評価式を用いれば、より正確に復号誤り確率を求めることができるであろう。

#### 6 まとめと今後の課題

本研究では、Gilbert 通信路において LDPC 符号に対し、BF 復号法を用いた場合の復号誤り確率の評価式を導いた。また、数値実験によりその有効性を示した。

今後の課題として、BSC の場合と同様に復号誤り確率が 0 となる閾値の算出を行う必要がある。本研究では Gallager による構成法の LDPC 符号のみで計算を行ったが、その他の構成法の LDPC 符号を用いた場合の復号誤り確率についても検討する必要がある。また、Gilbert-Elliot 通信路など隠れマルコフ型雑音通信路における解析方法の一般化が挙げられる。その他に、合成トレリスを用いて sum-product 復号法と同様に確率計算を行う復号方法の導出と解析が挙げられる。

#### 謝辞

著者の一人細谷は、若狭司氏をはじめ平澤研究室の諸氏に深く感謝いたします。

#### 文献

- [1] R.G.Gallager, *Low density parity check codes*, MIT Press, 1963.
- [2] J.Garcia-Frias, "Decoding of low-density parity check codes over finite-state binary Markov channels," *Proc. of IEEE International Symposium on Information Theory*, Washington D.C., U.S.A., June 2001.
- [3] E.N.Gilbert, "Capacity of a burst-noise channel," *Bell Sys. Tec. Journal*, vol.39, pp.1253-1265, Sept. 1960.
- [4] K.Koike, and H.Ogiwara, "Performance evaluation of Turbo code over impulsive noise channel," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E84-A no.10, pp.2418-2426, Oct. 2001.
- [5] T.Wadayama, "An iterative decoding algorithm of low density parity check codes for hidden Markov noise channels," *Proc. of International Symposium on Information Theory and its Applications*, Honolulu, Hawaii, U.S.A, Nov. 2000.
- [6] 細谷剛, 八木秀樹, 小林学, 平澤茂一, "バースト誤り通信路に適した低密度パリティ検査符号の構成法," *信学技報*, IT2003-20, pp.61-66, 7月, 2003.