

ビタビアルゴリズムを用いた可変サイズのリスト復号における誤り指数について

新家 稔央^{†a)} 松嶋 敏泰^{††} 平澤 茂一^{††}

On Error Exponents for Variable Size List Decoder Using the Viterbi Algorithm with Likelihood Ratio Testing

Toshihiro NIINOMI^{†a)}, Toshiyasu MATSUSHIMA^{††}, and Shigeichi HIRASAWA^{††}

あらまし Yamamoto, Itoh の判定帰還 (ARQ) 方式 [1] で用いられていた判定基準 LR [3] は、判定基準の計算に必要な労力が少ないことから、ビタビアルゴリズム (VA) との整合性に優れていることが知られている。また、Forney は、ブロック符号に対して、最ゆう復号を可変サイズのリスト復号 (VLD) に拡張した符号化定理を導いている。本論文では、畳込み符号を VA で復号する場合に、LR を用いた可変サイズのリスト復号 (VLD) へ拡張するアルゴリズムを提案し、その誤り指数の下界を離散的無記憶通信路を仮定して導出する。

キーワード リスト復号法, ビタビアルゴリズム, ランダム符号化, 判定基準

1. ま え が き

可変サイズのリスト復号器 (variable size list decoder. 以下, VLD と呼ぶ) は、最ゆう復号を一般化した復号として、G.D.Forney, Jr. [4] がブロック符号を用いて提案し、同時に符号化定理を導いた [4] における一般化は、受信系列に対して判定基準 (decision criteria) をおくことで行われる。すなわち、最ゆう復号が「復号するメッセージをただ一つに決めて出力する」のに対し、ここでの一般化の意味は、「復号するメッセージを一つ出力するか、何も出力しない^(注1)」、若しくは、「復号するメッセージを複数個決定して出力する (VLD)」復号に拡張することを指している。

その後、畳込み符号を用いた場合に対しても、判定帰還 (ARQ) 方式への拡張を目的として [4] 式 (11) とは異なる判定基準を設けたアルゴリズムが提案され、その符号化定理の導出がなされている [1], [3], [7], [8]。

畳込み符号を用いた場合、最ゆう符号語の探索だけであれば、ビタビアルゴリズム (VA) により、トレリス構造を利用した効率の良い復号ができる。しかし、前述したような復号の一般化を考えると、VA を行っていく中で要する判定基準の計算労力など、VA と判定基準との整合性について考慮しなければならない問題点も生じる。したがって、ブロック符号においては、Neyman-Pearson の最適性 [4] を満たす Forney の判定基準を用いれば十分であったのに対し、畳込み符号においては、従来よりいくつかの判定基準が提案され、その符号化定理に対する議論がなされてきた。そして、これらの議論は、特に判定帰還 (ARQ) 方式についての的を絞って議論されてきたものであり、VLD に対して行われたものではなかった^(注2)。そこで本論文では、判定基準に要する計算がほとんど無視できる意味で、VA との整合性が優れている [1] で用いられた判定基準を用いた場合の VLD の誤り指数を新しく導出する。なお、通信路容量 C の離散的無記憶通信路を仮

[†] 神奈川工科大学情報ネットワーク工学科, 厚木市
Department of Information Network Engineering, Kanagawa Institute of Technology, 1030 Shimo-ogino, Atsugi-shi, 243-0292 Japan

^{††} 早稲田大学理工学部経営システム工学科, 東京都
Department of IE and Management Systems, School of Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo, 169-0072 Japan

a) E-mail: niinomi@nw.kanagawa-it.ac.jp

(注1): 消失判定を行う復号器。判定帰還 (ARQ) 方式や接続符号の内部符号の復号に用いられる。

(注2): Forney [4] の式 (11) の判定基準を用いた場合には、この論文で指摘されているように、ARQ と VLD の場合でほとんど解析方法が同じという双対性が成り立つ。したがって、VLD の結果が ARQ の結果から簡単に導出できる。しかし、その他の判定基準を用いた場合、一般にはその双対性は成り立たない。

定する．

2. 準備

本論文では、以下の表記を用いることにする．

2.1 離散的無記憶通信路 (DMCs)

入力アルファベット $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, a-1\}$, 出力アルファベット $\mathcal{B} = \{0, 1, \dots, b-1\}$ の離散的無記憶通信路 (DMCs) を仮定し、その通信路行列 $P = \{P_{ji}, i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{B}\}$ を仮定する．

2.2 ブロック符号について

符号長 N_B , メッセージ数 $e^{N_B R}$ のブロック符号に対して、メッセージ i に対する符号語を \mathbf{x}_i , 受信系列 \mathbf{y} と表記する．

2.3 畳込み符号について

送信される情報記号系列 (メッセージ) を \mathbf{u}^N で表す．ただし、 \mathbf{u}^N は、符号器へ入力される q 元アルファベット $\mathcal{U} = \{0, 1, \dots, q-1\}$ からなる長さ N の系列である．よって、ある情報記号系列 \mathbf{u}_i^N は、 $\mathbf{u}_i^N = u_{i,1} u_{i,2} \dots u_{i,t} \dots u_{i,N}$ (ただし、 $u_{i,t} \in \mathcal{U}, t = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, q^N$) で示される．ブランチ拘束長 K の畳込み符号は q 進木で示すことができ、ある情報記号系列はルートから伸びる 1 本のパスに対応する．すなわち、 \mathbf{u}_i^N の第 t ブランチに対する符号系列は、 $u_{i,t}$ の符号器への入力、及び、 $u_{i,t-1}, u_{i,t-2}, \dots, u_{i,t-K}$ で定まる符号器の状態によって定まる．また、符号化に用いる 1 ブランチ当りの通信路への入力シンボルの数を v とすると、レート (情報伝送速度) R は $R = \frac{1}{v} \ln q$ (nats/シンボル) と定義できる^(注3)．

なお、パス \mathbf{u}_i^N の第 1 ブランチから第 n ブランチまでの部分系列を \mathbf{u}_i^n で記す．更に、第 1 ブランチから第 n ブランチまでのパス \mathbf{u}_i^n に対する符号系列及び受信系列を、それぞれ、 $\mathbf{x}_i^{v_n}$ 及び \mathbf{y}^{v_n} と表し、その第 t ブランチに対する符号系列及び受信系列を、それぞれ、 $\mathbf{x}_{i,t}^v$ 及び \mathbf{y}_t^v で記すことにする．

2.4 Forney の判定基準 (FR) とそのブロック符号への適用

Forney [4] 式 (11) による判定基準を [3] に習い FR と呼ぶ．ブロック符号における判定基準 FR は、受信系列を次式に照らし合わせて、復号器が出力するメッセージを決定する．

$$\frac{\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)}{\sum_{\mathbf{x}_{i'} \neq \mathbf{x}_i} \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{i'})} \geq \Delta \implies \text{メッセージ } i \text{ を出力}$$

else メッセージ i を出力しない (1)

すなわち、しきい値 Δ の値が $\Delta > 1$ ならば、この判定基準を満たす符号語一つが出力されるか何も出力しない (消失) かのいずれかであるので、ARQ などの消失判定を行う復号器となる．逆に、 $\Delta < 1$ ならば、この判定基準を満たす符号語は、一つ以上の符号語を出力するので、VLD となる．また、 $\Delta = 1$ では通常用最ゆう復号を行う復号器となる．

Forney [4] は、消失判定を行う復号器と VLD の関係が、しきい値の正負を換えるだけの双対な関係であり、これら各々の符号化定理についてもほとんど同様な過程で導出できることを指摘している．ところが、畳込み符号に VA を用いて復号する場合、FR を計算するためには^(注4)、VA の計算量とは別にかなりの労力を必要とする．そこで、次章では、VA との整合性に優れた判定基準と、これを畳込み符号における判定帰還 (ARQ) 方式に適用したアルゴリズム [1] を示そう．

3. Yamamoto, Itoh [1] の判定帰還方式で用いられた判定基準と畳込み符号に対する VLD の提案

前章で示した FR の判定基準を、畳込み符号に適用することも可能である．しかし、消失判定を行わない通常の VA と比較すると、判定基準の計算のために必要な計算量が決して少なくない．これはブロック符号の場合と異なり、符号の構造を利用して、最大ゆう度の符号語以外のゆう度計算をなるべく抑えようとした VA の利用が可能なゆえに生じる問題である．そもそも、消失判定は復号の計算量を抑えながら復号誤り確率を小さくすることが目的であるから、判定基準のために計算量が大きくなるのでは本末転倒とする見方もある．したがって、Raghavan and Baum [9] や Hashimoto [3] に記された方式が復号誤り確率固定のもとで再送要求の確率最小を達成しようとも、Yamamoto, Itoh [1] の判定帰還方式が実際上は有効とする見方もできる．

そこで本論文では、畳込み符号に対し、ほぼ VA に必要な計算量だけで実行できる判定基準を用いた Yamamoto, Itoh の判定帰還方式のアルゴリズム [1] を次に示し、続いてこのアルゴリズムと同じ判定基

(注3): 本節に記した畳込み符号は、文献 [11] p.261 に記された定義と同様である．

(注4): 畳込み符号に対して、FR の判定基準を効率良く実行するには [9] で示されたアルゴリズムが知られる．しかし、判定基準を計算するための労力は [1] と比較して明らかに大きい．

準を用いた VLD のアルゴリズムを提案して考察を加える .

[Yamamoto, Itoh の判定帰還方式]

レベル $K - 1$ まで, すべてのパスを伸長し, そのラベルを *Accept* とおく . また, レベル $N + 1$ よりレベル $N + K - 1$ の情報系列には既知シンボルが入力されているものとする . このとき, レベル $n (K \leq n \leq N + K - 1)$ に対して以下の手続き (1)~(3) を繰り返す .

(1) レベル n のパス選択に対する初期条件

レベル $n - 1$ において, q^{K-1} 個の状態ごとに 1 本だけのパスがサバイバとして保持されている . このサバイバは, 長さ $n - 1$ ブランチのパスであり, *Accept* または *Reject* のラベルをもつ .

(2) パス伸長

q^{K-1} 個のサバイバに対して, レベル n まで 1 ブランチの伸長を行いゆう度の計算を行う .

(3) サバイバのパス選択とそのラベルの判定

レベル n の q^{K-1} の各々のノードにおいて, 最もゆう度の大きいパスのゆう度を $\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(1)}^{vn})^{(注5)}$, 2 番目に大きいパスのゆう度 $\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(2)}^{vn})$ に対し,

$$\frac{\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(1)}^{vn})}{\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(2)}^{vn})} \geq \Delta, \quad \Delta > 1 \quad (2)$$

を満たせば, このパスをラベル *Accept* のサバイバとする . そうでなければ, ラベル *Reject* のサバイバとする . ただし, 一度 *Reject* のラベルのついたサバイバのラベルは *Reject* のままとする . レベル n で残った q^{K-1} 本のサバイバのラベルがすべて *Reject* であった場合, ルートノードよりすべての受信系列の再送を要求し, レベル K よりすべてのパス選択をやり直す .

レベル $N + K - 1$ における *Accept* のパスを, 最終的なサバイバとして出力する (アルゴリズム終了)

ここで示したアルゴリズムは, 各ノードで局所的に最大ゆう度をもつパスと 2 番目に大きなゆう度をもつパスを比較している . ところが, レベル $N + K - 1$ では, トレリスに含まれるすべてのパスの中で最大ゆう度のパスと 2 番目のゆう度のパスを必ず比較することを保証する . すなわち, 終端した畳込み符号のトレリス全体をブロック符号とみなせば, Yamamoto, Itoh の判定帰還方式は, トレリス全体で次の判定基準の $\Delta > 1$ である場合に相当する .

$$\exists i, \forall i' \neq i,$$

$$\frac{\Pr(\mathbf{y}^{v(N+k-1)} | \mathbf{x}_i^{v(N+k-1)})}{\Pr(\mathbf{y}^{v(N+k-1)} | \mathbf{x}_{i'}^{v(N+k-1)})} \geq \Delta,$$

\implies 情報記号列 \mathbf{u}_i^N を出力

else 情報記号列 \mathbf{u}_i^N を出力しない (3)

この判定基準を [3] に倣い, ゆう度比検定 (LR) と呼ぶことにする . Yamamoto, Itoh の判定帰還方式では, LR のしきい値 Δ に 1 より大きな値が用いられた . したがって, このしきい値を 1 より小さくし, かつ, VA と組み合わせることで, 畳込み符号に対する VLD の構成が自然に考えられる . しかも, LR を用いた場合には, 判定基準に必要な計算量を抑えることが期待できる . しかし, ブロック符号の場合と異なり, 畳込み符号を用いる場合には, 単純にしきい値の値を変えるだけでは, VLD のアルゴリズムにならない . そこで, 以下に LR を用いた VLD のアルゴリズムを提案し, 次章でその評価を行うことにする .

[LR の判定基準を用いた VLD のアルゴリズム]

レベル $K - 1$ まで, すべてのパスを伸長する . また, レベル $N + 1$ よりレベル $N + K - 1$ の情報系列には既知シンボルが入力されているものとする . このとき, レベル $n (K \leq n \leq N + K - 1)$ に対して以下の手続き (1)~(3) を繰り返す .

(1) レベル n のパス選択に対する初期条件

レベル $n - 1$ において, q^{K-1} 個の状態ごとに 1 本以上のパスからなるリストが保持されている . リストの要素は, 長さ $n - 1$ ブランチのパスである .

(2) パス伸長

q^{K-1} 個のリストの各々のパスに対して, レベル n まで 1 ブランチの伸長を行いゆう度の計算を行う .

(3) リストに残すパスの選択とその判定

レベル n の q^{K-1} の各々のノードにおいて, 最もゆう度の大きいパスのゆう度を $\Pr(\mathbf{y}^{vm} | \mathbf{x}_{(1)}^{vm})$, 2 番目以下であるパス m のゆう度を $\Pr(\mathbf{y}^{vm} | \mathbf{x}_m^{vm})$ としたとき,

$$\frac{\Pr(\mathbf{y}^{vm} | \mathbf{x}_m^{vm})}{\Pr(\mathbf{y}^{vm} | \mathbf{x}_{(1)}^{vm})} \geq \Delta, \quad \Delta < 1 \quad (4)$$

を満たせば, m をこのノードに残すリストに含める . そうでなければ, 捨てる .

レベル $N + K - 1$ において選択されたリストを, 最

(注5): 本論文では, レベル n のノードにおいて, 情報記号列 \mathbf{u}_ℓ^N に対するゆう度を $\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_\ell^{vn})$ と表すのに対し, ゆう度が ℓ 番目に大きいパスのゆう度を $\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(\ell)}^{vn})$ と使い分ける . すなわち, (\cdot) はあるノードでのパスのゆう度に対する順位を表す添字である .

最終的なリストとして出力する（アルゴリズム終了）

VLD では、各ノードで生き残るパスが 1 本ではなく、複数本でその数が確率変数となる^(注6)。式 (4) では、各ノードごとに「最大ゆう度のパス自身も含め、最大ゆう度のパスに対してあるゆう度より大きいパス」をすべてリストとして残す。リストに含まれるパスは、すべて次のレベルのノードへ伸長され、再び式 (4) によって、リストに残るか捨てられるかが決められる。

このように、各ノードごと局所的に構成されたリストは逐次更新され、レベル $N + K - 1$ において、トレリス全体で「最大ゆう度をもつパスと、最大ゆう度のパスに対しあるゆう度より大きいパス」を含むリストを出力する。したがって、提案した VLD のアルゴリズムは、トレリス全体に対して (3) の基準を $\Delta < 1$ として用いている。

4. 提案する VLD の誤り指数

本章では、提案した畳み込み符号における VLD に対して [4] の定義に従い誤り指数を導出する。

ここで、提案する LR を用いた VLD の解析の過程は、畳み込み符号に同じく LR を用いた ARQ の解析 [2] にすべて一致しないことに注意したい。これは、4.3 の平均リストサイズの上界の導出の過程が異なることによる。

これに対し、畳み込み符号に FR を用いた VLD の誤り指数は、Hashimoto [3] で求められた結果を用いれば、直ちに導出できる。4.5 では、強雑音通信路 (VNC: 例えば [12], [13] などを参照) を仮定し、提案する VLD の誤り指数とこれらの誤り指数を比較する。

4.1 しきい値の大小とリスト復号誤り確率

VLD に対する復号誤りは、リスト復号誤りであり、レベル $N + K - 1$ でできる最終的なリストの中に正しいパスを外してしまう事象である。各ノードでは、判定基準 LR に与えられたしきい値によってサバイバがリストに含まれるか否かが決定される。したがって、しきい値の大小に対し、正しいパスをリストから外してしまう確率と多くの正しくないパスをリストに含めてしまう確率にはトレードオフの関係がある。もし、しきい値を無造作に小さくとってしまうと、正しいパスはリストから漏れにくいかもしれないが、レベル $N + K - 1$ のリストに残る誤りパスの平均本数はばく大な数となる。そこで [4] に従い、リストに残る誤り

パスの平均本数 $E[S_{elist}]$ の上界を 4.3 で求め、この値が拘束長 K が増えるとともに任意に小さくできることを条件に、しきい値の条件を設定する。そして、その条件のもとで、復号誤り確率に対する誤り指数が達成し得る最も大きい値を明らかにする。以下では、固定されたしきい値 Δ に対するリスト復号誤り確率の上界を 4.2 で、また、上記のしきい値の条件のもとでの誤り指数の最大化を 4.4 で、それぞれ示そう。

4.2 リスト復号誤り確率の上界

前述したように、リスト復号誤りとは、レベル $N + K - 1$ でできる最終的なリストの中に正しいパスが入っていない確率を指す。本節では、リスト復号誤り確率 $\Pr(E_1)$ の上界を導出する。

正しいパス \mathbf{u}_0^N としたときに、このパスのレベル n までの部分列 \mathbf{u}_0^n がレベル n のノードにおいてリストから外れてしまう確率を $P_{E_1,n}(\mathbf{u}_0^N)$ で表す。すると、レベル $N + K - 1$ の最終的なリストに正しいパスが含まれない確率 $\Pr(E_1)$ は、次のようにユニオン上界できる。

$$\Pr(E_1) \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} \sum_{n=K}^{N+K-1} P_{E_1,n}(\mathbf{u}_0^N) \quad (5)$$

更に、 $P_{E_1,n}(\mathbf{u}_0^N)$ についても、以下のように上界が可能である。

A をレベル n で合流する誤りパスの集合とし、 A に含まれる誤りパスとその符号系列を、それぞれ \mathbf{u}_i^n と \mathbf{x}_i^{yn} (ただし、 $i \in A$) で表記する。また、正しいパス \mathbf{u}_0^N に対する符号系列のレベル n までの部分列を \mathbf{x}_0^{yn} とする。正しいパス \mathbf{u}_0^N がレベル n でリストから外れる事象は、ある誤りパス i 、 $i \in A$ と正しいパスのゆう度比 $\frac{\Pr(\mathbf{y}^{yn}|\mathbf{x}_0^{yn})}{\Pr(\mathbf{y}^{yn}|\mathbf{x}_i^{yn})}$ が Δ より小さくなるときに起こる。すなわち、

$$P_{E_1,n}(\mathbf{u}_0^N) = \Pr \left[\begin{array}{l} \text{レベル } n \text{ のノードで、ある} \\ i \in A, i \neq 0 \text{ に対し } \frac{\Pr(\mathbf{y}^{yn}|\mathbf{x}_0^{yn})}{\Pr(\mathbf{y}^{yn}|\mathbf{x}_i^{yn})} < \Delta \end{array} \right]$$

である。 $P_{E_1,n}(\mathbf{u}_0^N)$ を陽に求めることは難しいが、レベル n で合流する可能性のあるすべての誤りパスに対

(注6): なお、リストのサイズが固定されたリスト復号 (FLD) を VA で行うアルゴリズムは [5] において、提案、解析されている。両者は「最大ゆう度の符号語だけでなく、ゆう度の大きい他の符号語の候補を出力する」という点で共通するが、両者の直接的な比較は難しいと考え、今後の課題としたい。ブロック符号においても、FLD [12], [13] と VLD [4] の直接の比較は、同様に難しいと思われる。

して, $\frac{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_0^{vn})}{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_i^{vn})} < \Delta$ となる確率のユニオンをとることで上界が可能である. すなわち,

$$\varphi(\mathbf{y}^{vn}, i) = \begin{cases} 1 : & \frac{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_0^{vn})}{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_i^{vn})} < \Delta \\ 0 : & \text{それ以外.} \end{cases}$$

とすると,

$$P_{E_1, n}(\mathbf{u}_0^N) \leq \Pr \left[\bigcup_{i \in A} \varphi(\mathbf{y}^{vn}, i) = 1 \right] \quad (6)$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{y}^{vn} : \bigcup_{i \in A} \varphi(\mathbf{y}^{vn}, i) = 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{y}^{vn} : \sum_{i \in A} \varphi(\mathbf{y}^{vn}, i) \geq 1 \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

であることと, 次式に示すパラメータ $\alpha \geq 0$ を用いた $\varphi(\mathbf{y}^{vn}, i)$ に対するチャーノフ上界 ([12]p.122 Prob.2.10)

$$\varphi(\mathbf{y}^{vn}, i) \leq \left[\frac{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_0^{vn})} \Delta \right]^\alpha \quad (8)$$

を利用すれば, 式 (6) は

$$\leq \Pr \left[\sum_{i \in A} \left(\frac{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_0^{vn})} \Delta \right)^\alpha \geq 1 \right]$$

と上界できる. 上式の [] の中の論理式に, α の代わりに $\sigma_1 \geq 0, \rho_1 \geq 0$ を用いて, 更にチャーノフ上界を施せば,

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{\mathbf{y}^{vn}} \Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_0^{vn}) \cdot \\ & \cdot \left[\sum_{i \in A} \left(\frac{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_0^{vn})} \Delta \right)^{\sigma_1/\rho_1} \right]^{\rho_1} \end{aligned} \quad (9)$$

が成り立つ.

誤りパスの集合 A に対し, \sum_{A_2} をある時刻において正しいパスから分岐しレベル n で合流する誤りパスの集合に対する和とする. 更に, 分岐の起こるあらゆる時刻に対しての和を \sum_{A_1} で示す. すなわち, $\sum_A = \sum_{A_1} \sum_{A_2}$ であるとする. また, $0 \leq \rho \leq 1$ と制約を設ければ, 不等式 $(\sum_i a_i)^\rho \leq \sum_i a_i^\rho$, $0 \leq \rho \leq 1$ を用いことができるので, 式 (9) は,

$$\begin{aligned} & \leq \Delta^{\sigma_1} \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}^{vn}} \Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_0^{vn})^{1-\sigma_1} \cdot \\ & \cdot \left\{ \sum_{A_2} \Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_i^{vn})^{\sigma_1/\rho_1} \right\}^{\rho_1} \end{aligned} \quad (10)$$

と上界することができる.

この結果にランダム符号化を施すと, 次の補題が得られる (証明は付録を参照).

[補題 1] ランダム符号化を用いることで, $\Pr(E_1)$ のアンサンブルに対する平均誤り確率 $\mathcal{E}\Pr(E_1)$ が次式で上界される.

$$\mathcal{E}\Pr(E_1) \leq \frac{N e^{vR\rho_1}}{1 - e^{-v\epsilon_1}} \cdot \exp \{ -Kv [E_1(R, \Delta)] \},$$

$$E_1(R, \Delta) = \max_{\mathcal{D}_1} \left[E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \sigma_1 \frac{\ln \Delta}{Kv} \right]$$

$$\mathcal{D}_1 = \{ \mathbf{q}, 0 \leq \rho_1 \leq 1, \sigma_1 \geq 0,$$

$$\epsilon_1 = E_o(\sigma_1, \rho_1) - \rho_1 R > 0. \}$$

$$E_o(\sigma, \rho, \mathbf{q})$$

$$= -\ln \left[\sum_j \left(\sum_i q_i P_{ji}^{1-\sigma} \right) \left(\sum_i q_i P_{ji}^{\sigma/\rho} \right)^\rho \right]$$

ただし, $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{a-1})$ を通信路への入力シンボルに対する確率分布とする. \square

4.3 レベル $N + K - 1$ のリストに残る誤りパスの平均本数の上界

正しいパスを \mathbf{u}_0^N とする. レベル n の正しいパスが合流するノードにおいて, リストに残る誤りパスの平均本数を $E[S_{list, n}]$ とする. このとき, レベル $N + K - 1$ のリストに残る誤りパスの平均本数 $E[S_{list}]$ は, レベル n からレベル $N + K - 1$ までのユニオン上界により,

$$E[S_{list}] \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} \sum_{n=K}^{N+K-1} E[S_{list, n}] \quad (11)$$

で抑えられる. また, $E[S_{list, n}]$ に対しても, この値を陽に求めることは難しいので, ユニオン上界を用いて評価する. インジケータ $\phi(\mathbf{y}^{vn}, i)$, $i \in A$ を,

$$\phi(\mathbf{y}^{vn}, i) = \begin{cases} 1 : & i \text{ が, リストに入る} \\ 0 : & \text{それ以外} \end{cases}$$

とすると, 平均の上界は, レベル n で合流する可能性のあるすべての誤りパスに対するユニオンをとって,

$$E[S_{list,n}] \leq \sum_{\mathbf{y}^{vn}} \Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn}) \sum_A \phi(\mathbf{y}^{vn}, i)$$

と上界される。また、 $\phi(\mathbf{y}^{vn}, i)$ は、 $\sigma_2 \geq 0$ を用いて、

$$\phi(\mathbf{y}^{vn}, i) \leq \left(\frac{\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \Delta^{-1} \right)^{\sigma_2} \quad (12)$$

で上界できるので、

$$\begin{aligned} E[S_{list,n}] &\leq \Delta^{-\sigma_2} \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}^{vn}} \Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})^{1-\sigma_2} \cdot \\ &\cdot \sum_{A_2} \Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})^{\sigma_2} \end{aligned} \quad (13)$$

が成り立つ。この結果にランダム符号化を施すと、下記の補題が導ける（証明は付録参照）。

[補題 2] ランダム符号化を用いることで、 $E[S_{list}]$ のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}E[S_{list}]$ が次式で上界される。

$$\mathcal{E}E[S_{list}] \leq \frac{N e^{vR}}{1 - e^{-v\epsilon_2}} \cdot \exp\{-Kv[E_2(R, \Delta)]\}$$

$$E_2(R, \Delta) = \max_{\mathcal{D}_2} \left[E_o(\sigma_2, 1, \mathbf{q}) + \sigma_2 \frac{\ln \Delta}{Kv} \right]$$

$$\mathcal{D}_2 = \{ \mathbf{q}, \sigma_2 \geq 0,$$

$$\epsilon_2 = E_o(\sigma_2, 1) - R > 0. \} \quad \square$$

4.4 誤り指数の導出

誤り指数の導出を行う前に、補題 1 と補題 2 の指数部を同時に満たす符号の存在を示しておく。

[補題 3] 次式を同時に満たす符号が存在する。

$$\Pr(E_1) \leq 2\mathcal{E}\Pr(E_1),$$

$$E[S_{list}] \leq 2\mathcal{E}E[S_{list}] \quad (14) \quad \square$$

(証明)[16] 補題 4 参照。

したがって、対象とするアルゴリズムに対し、しきい値 Δ が動いたときに、その指数部が $E_1(R, \Delta)$ と $E_2(R, \Delta)$ を同時に達成する符号が存在することが保証される。

すると、誤り指数は、以下のように導出すればよい。ブランチ拘束長 K を $K \rightarrow \infty$ としたとき、 $\Pr(E_1)$ 及び $E[S_{list}]$ が、両方とも任意に小さくなる範囲をしきい値の範囲とする。誤り指数 $E_1(R, \Delta)$ を達成し得る最も大きい値とするためには、できるだけ、しきい値を小さくとりたい。そこで、 $E_2(R, \Delta) \rightarrow 0, E_2(R, \Delta) > 0$

としたのち、 σ_2 を \mathcal{D}_2 の範囲で最適化して、 $\frac{\ln \Delta}{Kv}$ が最も小さくなるようにしきい値 Δ を定める。その上で、 σ_1, ρ_1 を \mathcal{D}_1 の範囲で、 $E_1(R, \Delta)$ が最も大きい値をとるように最適化したものが求める誤り指数となる。

以上のようにして得られた誤り指数を定理に示す。
[定理 1] 提案する畳み込み符号を用いた VLD のアルゴリズムは、以下に示される誤り指数 $e_{vld}(R)$ を達成する。

$$\begin{aligned} e_{vld}(R) &= E_1(R, \Delta), \quad \Delta = \exp\{-Kv[\theta(R)]\}, \\ \theta(R) &= \frac{E_o(\sigma_2, 1)}{\sigma_2}, \\ \sigma_2 &= \arg\left[\inf_{0 \leq \sigma_2} E_o(\sigma_2, 1) > R \right] \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 $E_o(\sigma_2, 1)$ は、 $\max_{\mathbf{q}} E_o(\sigma_2, 1, \mathbf{q})$ を示す。□

式 (15) において、 $e_{vld}(R)$ の値を最も大きくするには、 $\theta(R)$ の値を最も大きくしたい。このとき、 $E_o(\sigma_2, 1)$ が $\sigma_2 \geq 0$ に対して上に凸な関数であること [2] に注意する。すると、 σ_2 に対し、 $E_o(\sigma_2, 1) - R > 0$ を満たしたもとの、できるだけ小さな値を選べば $e_{vld}(R)$ の最大化ができる。

では、 $0 \leq R < C$ なる任意の R を与えたとき、 $e_{vld}(R) > 0$ が成り立つかに興味はわくが、このことに関して次の系を与える。

[系 1] レート R を与えたとき、 $e_{vld}(R)$ を達成するには、 $\sigma_2 = \arg\left[\inf_{0 \leq \sigma_2} E_o(\sigma_2, 1) > R \right]$ であるような σ_2 が存在しなければならない。しかし $E_o(\sigma_2, 1)$ の値は、Holder の不等式により、

$$0 \leq E_o(\sigma_2, 1) \leq E_o\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

である。したがって、 $e_{vld}(R) > 0$ となるレート R は、 $0 \leq R < E_o\left(\frac{1}{2}, 1\right) = E_o(1)$ の範囲に限られる。ここで、 $E_o(1)$ は Gallager 関数 $E_o(\rho) |_{\rho=1}$ 、

$$E_o(\rho) = -\ln \left[\sum_j \left(\sum_k q_k P_{jk}^{1/1+\rho} \right)^{1+\rho} \right]$$

を示す。□

すなわち、 $e_{vld}(R) > 0$ となるレート R は、 $0 \leq R < E_o(1) = R_{\text{comp}}$ の範囲である。なお、 R_{comp} は、カットオフレート ([14] など) と呼ばれる。

一般の DMC では、定理 1 で示された誤り指数を、これ以上簡潔に表記することはできないので、次節において、VNC における数値計算結果を示す。

4.5 強雑音通信路における数値計算

ここでは、VNC を仮定し、定理 1 で導出された VLD の誤り指数に対する数値計算結果を示す。また、畳込み符号に FR を適用した場合の VLD の誤り指数を [3] p.85, Theorem 3 において、 $T \rightarrow E_o(s, \rho, p)/(1-s)$ とすることで得ることができる。そこで、この誤り指数を $e_\ell(R)$ と表記し、新しく得られた誤り指数と比較する。更に、LR 及び FR を判定帰還方式で用いた場合の誤り指数が [2] 及び [3] で得られているので、これらをそれぞれ $e_1(R)$ 、 $e_F(R)$ で表記する。以上の誤り指数を比較し、次節で考察を加える。

q を最適化して得られる通信路容量 C の強雑音通信路を仮定すると、

$$E_o(\sigma, \rho) = \sigma \left\{ 2 - \sigma \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \right\} C$$

$$e_F(R) = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R}{C}} \right) C$$

$$e_\ell(R) = \max_{0 \leq \sigma \leq \rho \leq 1} \frac{E_o(\sigma, \rho)}{1 - \sigma}$$

$$e_1(R) = \max_D [E_o(\sigma, \rho) + \sigma \cdot e_F(R)]$$

$$D = \{ \sigma \geq 0, 0 \leq \rho \leq 1, E_o(\sigma, \rho) - \rho R > 0 \}$$

であり、定理 1 で示された誤り指数 $e_{vld}(R)$ は、

$$e_{vld}(R) = \max_D [E_o(\sigma, \rho) + \sigma \cdot \theta(R)]$$

$$\theta(R) = \frac{2R}{C - \sqrt{C(C - 2R)}} C,$$

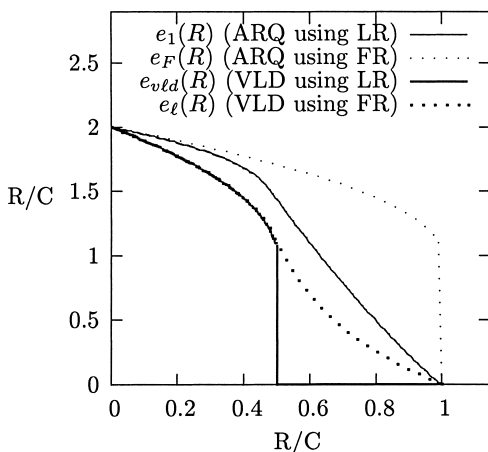


図 1 VNC における誤り指数
Fig. 1 Exponents on VNC.

$$0 \leq R < \frac{C}{2} = R_{comp}. \quad (16)$$

となる。

これらを用いた数値計算結果を図 1 に示す。

5. 考 察

Yamamoto, Itoh の判定帰還方式で用いられていた判定基準 LR は VA と整合性が良いことが知られていた。そこで本論文では、同じ判定基準を用いた畳込み符号に対する VLD のアルゴリズムを提案し、その誤り指数の下界を離散的無記憶通信路を仮定して導出した。

VNC における数値計算結果を見ると (図 1 参照)、レートが低いところでは、FR を畳込み符号に適用した場合と同じ誤り指数が得られた。したがって、提案した VLD は、 $0 \leq R < R_{comp}$ の低レートであれば、最適な判定基準である FR の計算をする労力をかけるまでもなく、同等の性能が期待できることが本論文によって明らかになった。

一方、 R_{comp} 以上のレートでは、 $e_{vld}(R) > 0$ である領域が存在しなかった。すなわち、今回、導出した結果によれば、提案アルゴリズムは、 $R > R_{comp}$ で用いることができない。この関係は、従来から知られている判定帰還方式における FR と LR の誤り指数の関係 [2] に類似している。[2] における判定帰還の誤り指数では、低レートで LR と FR の差はほとんどないが、レートが高くなるにつれ差は大きくなり、通信路容量付近で非常に大きな差になる。本論文により、VLD においても、レートの高い領域で LR と FR に大きな差が現れるという類似な関係があることが明らかとなった。

6. む す び

Yamamoto, Itoh の判定帰還方式で用いられていた判定基準 LR は計算量を増やさない意味で VA と整合性が良いことが知られていた。本論文では、同じ判定基準を用いた畳込み符号に対する VLD のアルゴリズムを提案し、その誤り指数の下界を離散的無記憶通信路を仮定して導出した。この結果、VNC における数値計算結果によれば、LR による VLD は $0 \leq R < R_{comp}$ の低レートに対して、最適だが大きい計算量の必要な FR を用いた VLD と同等の性能を期待できることが明らかになった。

文 献

- [1] H. Yamamoto and K.Itoh, "Viterbi decoding algorithm for convolutional codes with repeat request," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-26, no.5, pp.540-547, Sept. 1980.
- [2] T. Hashimoto, "On the error exponent of convolutionally coded ARQ," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.40, no.2, pp.567-575, March 1994.
- [3] T. Hashimoto, "Composite scheme LR + Th for decoding with erasures and its effective equivalence to Forney's rule," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.45, no.1, pp.78-93, Jan. 1999.
- [4] G.D. Forney, Jr., "Exponential error bounds for erasure, list and decision feedback schemes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-14, no.2, pp.206-220, March 1968.
- [5] G.D. Forney, Jr., "Convolutional codes II: Maximum likelihood decoding," Inf. Control, vol.25, no.3, pp.222-266, July 1974.
- [6] L.I. Bluestein, "Exponential error bounds for discrete memoryless channels with sequential decision feedback," Inf. Control, vol.16, no.4, pp.222-266, July 1974.
- [7] R.J. Fang, "Lower bounds on reliability functions of variable-length nonsystematic convolutional codes for channels with noiseless feedback," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-17, no.2, pp.161-171, March 1971.
- [8] A. Drukarev, "Hybrid ARQ error control using sequential decoding," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-23, no.4, pp.311-318, 1970.
- [9] A.R. Raghuvaran and C.W. Baum, "A reliability output Viterbi algorithm with applications to hybrid ARQ," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.44, no.3, pp.1214-1216, May 1998.
- [10] C.E. Shannon, R.G. Gallager, and E.R. Berlekamp, "Lower bounds to error probability for coding for discrete memoryless channels," Inf. Control, vol.19, no.1, pp.65-103, 1967.
- [11] A.J. Viterbi, "Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.13, no.2, pp.260-269, April 1967.
- [12] A.J. Viterbi and J.K. Omura, Principles of communication and coding, McGraw-Hill, NY, 1979.
- [13] R.G. Gallager, Information theory and reliable communication, Wiley, NY, 1968.
- [14] S. Lin and D.J. Costello, Error control coding: Fundamentals and applications, Prentice-Hall, NJ, 1983.
- [15] G.D. Forney, Jr., Concatenated codes, M.I.T., MA, 1966.
- [16] 新家稔央, 松嶋敏泰, 平澤茂一, "木符号におけるリスト復号法を用いた判定帰還方式について," 信学論(A), vol.J83-A, no.1, pp.67-82, Jan. 2000.

付 録

ここでは, ランダム符号化を施して補題 1 の導出を行う過程について示す. この過程は, 補題 2 に関しても同様であり, この場合は, $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2, \rho_1 \rightarrow 1, \Delta \rightarrow \Delta^{-1}$ と置き換えればよい.

まず, パスに対するゆう度の標記を, ブランチに対するゆう度の積で書き換える. すなわち,

$$\Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn}) = \prod_{t=1}^n \Pr(\mathbf{y}_t^v | \mathbf{x}_{i,t}^v),$$

$$\sum_{\mathbf{y}^{vn}} = \sum_{\mathbf{y}_1^v} \sum_{\mathbf{y}_2^v} \cdots \sum_{\mathbf{y}_n^v}$$

で置き換える. 更に, パス i の第 t ブランチに対するゆう度を $P_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Pr(\mathbf{y}_t^v | \mathbf{x}_{i,t}^v)$ と略記すれば, 以下のように書ける.

$$P_{E_1, n}(\mathbf{u}_0^N) \leq \Delta^{\sigma_1} \cdot \sum_{A_1} \prod_{t=t_1}^n \sum_{\mathbf{y}_t^v} P_0(t)^{1-\sigma_1} \cdot \left\{ \sum_{A_2} P_i(t)^{\sigma_1/\rho_1} \right\}^{\rho_1} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

ただし, t_1 は, A_2 に含まれる誤りパスが正しいパスから分岐するレベルを示す.

次にランダム符号化を施す. 以下では, ブランチごとに独立に, かつ, 各々のブランチの v 個の入力アルファベットに対し独立に, 確率分布 $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{a-1})$ に従ってシンボルを割り付けたときのあらゆる符号に対する平均を求める. この平均を $E[\cdot]$, 及び, $\bar{\cdot}$ で表すことにする.

$E[x^\rho] < [E(x)]^\rho, 0 \leq \rho \leq 1$, 及び, 分岐したパス同士でブランチごとに符号語が独立であることを用い, 式 (A.1) は,

$$\overline{P_{E_1, n}} \leq \Delta^{\sigma_1} \cdot \sum_{A_1} \prod_{t=t_1}^n \sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P_0(t)^{1-\sigma_1}} \cdot \left\{ \sum_{A_2} \overline{P_i(t)^{\sigma_1/\rho_1}} \right\}^{\rho_1}. \quad (\text{A}\cdot 2)$$

A_2 の要素に含まれる誤りパスが正しいパスから t_1 で分岐し, レベル n に至るまでの長さ (ブランチ数) を n_1 とおく. すると, A_2 の要素は, $|A_2| \leq e^{(n_1 - K + 1)vR}$ で抑えられる. また, 符号化及び通信路は独立であるから,

$$\leq \Delta^{\sigma_1} \cdot \sum_{A_1} e^{\rho_1 n_1 v R} \cdot \left[\sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P_0(t)^{1-\sigma_1}} \left\{ \sum_{A_2} \overline{P_i(t)^{\sigma_1/\rho_1}} \right\}^{\rho_1} \right]^{n_1} \quad (\text{A}\cdot 3)$$

更に、一つのブランチに対する符号語についても、シンボルごとの符号化は独立であるので、

$$\sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P(t)^a} \left(\overline{P(t)^b} \right)^c = \left\{ \sum_j \left(\sum_i q_i P_{ji}^a \right) \left(\sum_i q_i P_{ji}^b \right)^c \right\}^v$$

を用い、 A_1 についての和を $\sum_{A_1} = \sum_{\{n \geq n_1 \geq K\}}$ と書き直せば、

$$\overline{P_{E_1, n}} \leq e^{-(K-1)vR\rho_1} \cdot \Delta^{\sigma_1} \sum_{n_1=K}^{\infty} \left[e^{\rho_1 R} \sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-\sigma_1} \right) \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\frac{\sigma_1}{\rho_1}} \right)^{\rho_1} \right]^{vn_1} \quad (\text{A}\cdot 4)$$

最後に、 $E_o(\mathbf{q}, \sigma_1, \rho_1) - \rho_1 R > 0$ と制約を付ければ、無限等比級数である上式が収束する。 $\mathbf{q}, \sigma_1, \rho_1$ を制約の許す範囲で動かし、最も厳しい上界がとれるようにすれば、上式は次のように書ける。

$$\overline{P_{E_1, n}} \leq \frac{e^{vR\rho_1}}{1 - e^{-v\epsilon_1}} \cdot \exp \left\{ -Kv \left[E_1(R, \Delta) \right] \right\},$$

$$E_1(R, \Delta) = \max_{D_1} \left[E_o(\sigma_1, \rho_1, \mathbf{q}) - \sigma_1 \frac{\ln \Delta}{Kv} \right]$$

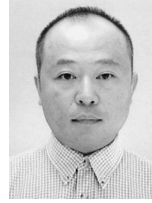
$$D_1 = \{ \mathbf{q}, 0 \leq \rho_1 \leq 1, \sigma_1 \geq 0, \epsilon_1 = E_o(\sigma_1, \rho_1) - \rho_1 R > 0. \}$$

$$E_o(\sigma, \rho, \mathbf{q})$$

$$= -\ln \left[\sum_j \left(\sum_i q_i P_{ji}^{1-\sigma} \right) \left(\sum_i q_i P_{ji}^{\sigma/\rho} \right)^\rho \right]$$

以上のように、レベル n において $\overline{P_{E_1, n}}$ を上界できたが、これはレベル K よりレベル $N + K - 1$ まで同様である。これらのユニオンにより上界をとれば、補題を得ることができる。

(平成 16 年 11 月 4 日受付, 17 年 4 月 1 日再受付, 7 月 8 日最終原稿受付)



新家 稔央 (正員)

昭 63 早大・理工・工業経営卒, 平 2 同大理工学研究科修士課程了, 平 2 同博士後期課程入学, 平 5 同中退. 平 3 早大理工学部助手, 平 7 早大理工総研嘱託研究員, 湘南工大, 職業能力開発大非常勤講師. 平 10 神奈川工科大電気電子工学科助手. 平 12 同大情報ネットワーク工学科助手. 平 17 同大情報ネットワーク工学科講師. 情報理論, 特に通信路符号化について興味をもつ. 情報理論とその応用学会, IEEE 各会員.



松嶋 敏泰 (正員)

昭 53 早大・理工・工業経営卒. 昭 55 同大学院修士課程了. 同年, 日本電気(株)入社. 昭 61 早大・理工学研究科・博士後期課程入学. 平 1 横浜商科大学講師. 平 3 同大助教授. 平 4 早大・理工学部・工業経営学科(現在経営システム工学科)助教授, 平 9 同大教授, 現在に至る. 知識情報処理及び情報理論とその応用に関する研究に従事. 工博. IEEE, 情報理論とその応用学会, 人工知能学会, 情報処理学会, OR 学会, 日本経営工学会等各会員.



平澤 茂一 (正員)

昭 36 早大・理工・数学卒. 昭 38 同大電気通信卒. 同年三菱電機(株)入社. 昭 56 早大・理工・工業経営学科(現在経営システム工学科)教授, 現在に至る. 情報理論とその応用, データ伝送方式, 並びに計算機応用システムの開発などの研究に従事. 工博. 昭 54 UCLA 計算機科学科客員研究員. 昭 60 ハンガリー科学アカデミー, 昭 61 伊トリエステ大学客員研究員. 平 5 本会小林記念特別賞, 業績賞受賞. IEEE Fellow, 情報理論とその応用学会, 人工知能学会, 情報処理学会, OR 学会, 日本経営工学会等各会員.