The 29th Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2006)
Hakodate, Hokkaido, Japan, Nov. 28 – Dec. 1, 2006

HMM 通信路に対する EM 復号の復号誤り確率の評価法
Performance Analysis of EM Decoding Algorithm for HMM Channels

小林　学*　　八木　秀樹†　　松嶋　敏泰†
Manabu KOBAYASHI　　Hideki YAGI　　Toshiyasu MATSUSHIMA
平澤　茂一†
Shigeichi HIRASAWA

Abstract— In this paper, we propose an evaluation method of the error performance of EM decoding for HMM channels. At first, we derive the error probability formula for EM decoding. Next, we evaluate this probability by Monte Carlo simulation because it is hard to analyse this formula. Then we reduce the complexity of the simulation by considering the structure of this formula. Finally, we propose the EM decoding method for Turbo codes.

Keywords— HMM Channels, EM Algorithm, Iterative Decoding, Turbo Codes

1　まえがき

記憶のある HMM 通信路に対し，Turin 及び Yagi らによって EM アルゴリズムを用いた線形符号の復号法が示されている [1, 2]．これらの復号では受信信号に対する符号語の対数事後確率を目的関数とし，まず解の候補となる初期系列を適当に選択する．次に候補系列が得られた元で，この目的関数に対して HMM の隠れパラメータで期待値をとった Q 関数を定義する．幸いこの Q 関数は簡単に求めることができ，BCJR アルゴリズムを用いることにより効率的に計算することができる．次にこの Q 関数を最大化する候補符号語を通常の最尤復号法のアルゴリズム（例えば Viterbi アルゴリズム）を用いて求める．EM 復号法はこの Q 関数を求める期待値操作と，Q 関数を最大とする候補符号語を求める最大化操作を繰り返すことにより解を求める復号法である．

この復号法が優れている点は，期待値をとった後の Q 関数には隠れパラメータは無くなっており，通常の最尤復号アルゴリズムを行う程度の計算量で最大化を行うことができる点である．またその復号誤り確率もかなり良い特性を示す．

本稿では，この復号法の復号誤り確率を評価する手法について考える．まず符号空間に 2 つの符号語しか存在しない場合の Q 関数の動きから，2 符号語に対する EM 復号法の復号誤り確率の式を導出する．次にこれの union bound を求めることを考える．残念ながらこれらの式に現れる積分と和の操作を陽に計算することは難しい．そこで，これらの式をモンテカルロシミュレーションで高速に求める手法を示す．

また最後に EM 復号法を拡張し，ターボ符号に対する EM 復号法を提案する．

* 〒251-8511 神奈川県藤沢市辻堂西海岸 1-1-25 湘南工科大学情報工学科 Department of Information Science, Shonan Institute of Technology, 1-1-25 Tsujido-Nishikaigan, Fujisawa, Kanagawa 251-8511 Japan. E-mail: kobayasi@info.shonan-it.ac.jp
† 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1，早稲田大学理工学部経営システム工学科 School of Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Ohkubo Shinjyuku-ku, Tokyo, 169-8555 Japan.

2　HMM 通信路と EM 復号法 [1, 2]

本稿では 2 元線形符号 C を仮定する．符号語 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in C, c_i \in \{0,1\}$，は BPSK を用いて $\boldsymbol{x} \in X^n$ に変換され，HMM 通信路に送出される．受信者は以下で定義する HMM 通信路の出力 $\boldsymbol{y} \in Y^n$ を受け取り，復号を行う．

定義 1 HMM 通信路 $\lambda = (S, X, Y, \pi, \{p_{i,j}(x,y)\})$ は，入力信号の集合 X，出力信号の集合 Y，有限状態集合 $S = \{1, 2, \ldots, N\}$，初期状態確率ベクトル $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$，ある時点の状態が i の元で，次の状態が j に遷移し，かつ入出力が $x \in X, y \in Y$ となる条件付き確率 $p_{i,j}(x,y) = P(j,x,y|i)$ により定義される．本稿では簡単のため，$p_{i,j}(x,y) = P(j,x,y|i) = P(j|i)P(x,y|i)$ が成り立つモデルを仮定し，加法的雑音とする．ここで，任意の状態遷移 $\boldsymbol{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in S^{n+1}$，任意の入出力系列 $\boldsymbol{x} \in X^n, \boldsymbol{y} \in Y^n$ と任意の時点 t に対し，次式が成り立つ．

$$P(s_t, x_t, y_t | s_0^{t-1}, x_1^{t-1}, y_1^{t-1}) = P(s_t, x_t, y_t | s_{t-1}), \quad (1)$$

$$P(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \pi_{s_0} \prod_{i=1}^{n} p_{s_{i-1}, s_i}(x_i, y_i) = P(\boldsymbol{s}) \prod_{i=1}^{n} P(x_i, y_i | s_{i-1}), \quad (2)$$

ただし任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し $\boldsymbol{a}_i^j = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$ とする．□

さてこの通信路に対し，文献 [1, 2] に提案されている EM 復号法について述べる．

ある $\boldsymbol{y}$ と候補符号語 $\hat{\boldsymbol{c}}$ が与えられたとき，符号語 $\boldsymbol{c}$ の関数 $Q(\boldsymbol{c}|\hat{\boldsymbol{c}})$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{c}|\hat{\boldsymbol{c}}) &= E_{\boldsymbol{S}}[\ln P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{s}) | \boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{c}}] \\ &= E_{\boldsymbol{S}}[\ln P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}|\boldsymbol{s}) | \boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{c}}] + E_{\boldsymbol{S}}[\ln P(\boldsymbol{s}) | \boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{c}}] \\ &= \sum_{\boldsymbol{s} \in S^{n+1}} P(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{c}}) \ln P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}|\boldsymbol{s}) + E_{\boldsymbol{S}}[\ln P(\boldsymbol{s}) | \boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{c}}]. \quad (3) \end{aligned}$$

ここで式 (3) の第 2 項は $\boldsymbol{c}$ とは無関係の定数となる．従って，第 1 項を最大にする $\boldsymbol{c}$ は $Q(\boldsymbol{c}|\hat{\boldsymbol{c}})$ を最大にする．また式 (3) の第 1 項に対し，式 (1),(2) から次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\sum_{\boldsymbol{s} \in S^{n+1}} P(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{c}}) \ln P(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}|\boldsymbol{s}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\boldsymbol{s} \in S^{n+1}} P(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{c}}) \ln P(y_i, c_i | s_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{t \in S} P(s_{i-1} = t | \boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{c}}) \ln P(y_i, c_i | s_{i-1} = t). \quad (4) \end{aligned}$$

式 (4) の $P(s_i=t|y,\hat{c})$ は $y,\hat{c}$ と HMM 通信路 λ のパラメータが既知であれば，BCJR アルゴリズムを用いることにより容易に求めることができる．

さて，符号語 c の事前確率が $P(c)=1/|C|$ を満たすならば，尤度 $P(y|c)$ を最大にする符号語 c_{max} は，次式を満たすことは容易に示すことができる．

$$Q(c_{max}|c_{max}) \ge Q(c|c_{max}), \forall c \in C. \tag{5}$$

そこで，EM 復号法では復号を Q 関数の最大化問題としてとらえ，以下のように繰返し操作を行う．

[EM 復号法]

1) 初期系列 $c^{(0)}$ を適当に選択する[1]．$l=0$ とする．
2) すべての $i \in [1,n]$ と $t \in S$ に対し $P(s_i=t|y,c^{(l)})$ を BCJR アルゴリズムにより求める．
3) すべての i と $c_i \in \{0,1\}$ に対し，次式を求める．
$$f(c_i)=\sum_{t\in S} P(s_{i-1}=t|y,c^{(l)}) \ln P(y_i,c_i|s_{i-1}=t). \tag{6}$$
4) 符号 C のトレリスを考え，$f(c_i)$ を枝メトリックとして Viterbi アルゴリズムを行うことにより，$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$ を最大にする符号語を求める．得られた符号語を $c^{(l+1)}$ とする．
5) もし $c^{(l+1)}=c^{(l)}$ ならば $c^{(l)}$ を出力し，終了．そうでなければ，$l=l+1$ としてステップ 2) へ．□

式 (3),(4) から，EM 復号法のステップ 2) ~ 4) において，$c^{(l+1)}=\arg\max_{c} Q(c|c^{(l)})$ としていることが分かる．

また，$P(y|c^{(l+1)}) \ge P(y|c^{(l)})$ となることも容易に導ける．

3 EM 復号法の復号誤り確率の評価法

3.1 復号誤り確率の union bound

本節では，上で述べた EM 復号法の復号誤り確率の評価方法を考える．送信した真の符号語を c^* とし，EM 復号で得られた結果を $\tilde{c}$ と表す．明らかに $\tilde{c} \neq c^*$ である事象が誤りである．C が線形符号であることと，加法的雑音を仮定しているため，一般性を失うことなく $c^*=0$ として評価する．

まず符号空間に $c^*=0$ と $\tilde{c}$ しか存在しない場合を考える．このとき，EM 復号法のステップ 1) の初期系列 $c^{(0)}$ により

$$Q(\tilde{c}|c^{(0)}) > Q(c^*|c^{(0)}), \tag{7}$$

が成り立つならば $c^{(1)}=\tilde{c}$，そうでなければ $c^{(1)}=c^*$ である．いま $c^{(1)}=\tilde{c}$ だったとすると，次式が成り立つとき，EM 復号は誤る．

$$Q(\tilde{c}|\tilde{c}) > Q(c^*|\tilde{c}). \tag{8}$$

逆に $c^{(1)}=c^*$ だったとすると，次式が成り立つとき EM 復号は誤る．

$$Q(\tilde{c}|c^*) > Q(c^*|c^*). \tag{9}$$

定義 2 実数 x に対するインジケータ I_x を以下で定義する．

$$I_x = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{10}$$

また，ある系列 $\hat{c}$ に対し

[1] 必ずしも符号語である必要は無い点に注意すべきである．

$$\Delta(\tilde{c},c^*|\hat{c}) = Q(\tilde{c}|\hat{c}) - Q(c^*|\hat{c}), \tag{11}$$

と定義する．□

この定義を用いると，符号語が 2 つしかない場合の EM 復号の復号誤り確率は以下となる．

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{E}}(\tilde{c}) &= \int P(y|c^*) \Big\{ I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^{(0)})} I_{\Delta(\tilde{c},c^*|\tilde{c})} + \\ &\qquad \Big(1 - I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^{(0)})}\Big) I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^*)} \Big\} dy \\ &= \sum_{s^*\in S^{n+1}} \int P(s^*)P(y|c^*,s^*) \Big\{ I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^{(0)})} I_{\Delta(\tilde{c},c^*|\tilde{c})} \\ &\qquad + \Big(1 - I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^{(0)})}\Big) I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^*)} \Big\} dy. \end{aligned} \tag{12}$$

式 (12) の union bound をとり，EM 復号法の復号誤り確率を次式で評価する．

$$P_{\mathcal{E}}^{UB} = \sum_{\tilde{c}\in C\setminus\{c^*\}} P_{\mathcal{E}}(\tilde{c}). \tag{13}$$

いま式 (11) で定義した $\Delta(\tilde{c},c^*|\hat{c})$ について，式 (3),(4) より

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{c},c^*|\hat{c}) &= \sum_{s\in S^{n+1}} P(s|y,\hat{c}) \ln \frac{P(y,\tilde{c}|s)}{P(y,c^*|s)} \\ &= \sum_{s\in S^{n+1}} \left\{ P(s|y,\hat{c}) \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{P(y_i,\tilde{c}_i|s_{i-1})}{P(y_i,c_i^*|s_{i-1})} \right\} \\ &= \sum_{s\in S^{n+1}} \left\{ P(s|y,\hat{c}) \sum_{i|\tilde{c}_i=1} \ln \frac{P(y_i,\tilde{c}_i=1|s_{i-1})}{P(y_i,c_i^*=0|s_{i-1})} \right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

と展開することができる．しかし残念ながら，この式を用いて式 (12) の積分と和を求めることは一般に難しい．そこで次節では，モンテカルロシミュレーションを用いて $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ の値を効率よく推定することを考える．

3.2 $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ の評価法

本節では $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ の値を効率よく推定する手法について述べる．通常のモンテカルロシミュレーションは以下のステップにより行われる．

[$P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ 推定法 1]

1) $N_{\mathcal{E}}$=0;
2) for ($l=1$; $l \le L$; l++){
3) $P(s)$ に従って $s^{(l)} \in S^{n+1}$ を 1 つ生成．
4) $P(y|c^*,s^{(l)})$ に従って $y^{(l)}$ を 1 つ生成．
5) $y^{(l)}$ に対して次式を計算．
$$N_{\mathcal{E}} \mathrel{+}= I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^{(0)})} I_{\Delta(\tilde{c},c^*|\tilde{c})} + \Big(1 - I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^{(0)})}\Big) I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^*)}. \tag{15}$$
6) }
7) $\hat{P}_{\mathcal{E}}(\tilde{c}) = N_{\mathcal{E}}/L$ と推定する．□

この推定法の問題点は，ステップ 2) ~ 6) の各繰り返し時に，必ず符号長 n に比例する計算量を必要とする点である．より詳細には 1 回の $s^{(l)}, y^{(l)}$ の生成がそれぞれ $O(n)$，1 個の $I_{\Delta(\tilde{c},c^*|\hat{c})}$ の計算量が $O(|S|^2 n)$ 程度必要となる．そこで本節では 1 回のシミュレーションに対し，確率的に $O(n)$ を必要としない手法を考える．

まず，HMM 通信路の出力 y に対し，

$$L_{\max}(y) = \max_{s\in S} \ln \frac{P(y,c=1|s)}{P(y,c=0|s)}, \quad (16)$$

$$L_{\min}(y) = \min_{s\in S} \ln \frac{P(y,c=1|s)}{P(y,c=0|s)}, \quad (17)$$

と定義する．このとき次の補題が成り立つ．

補題 1 ある受信系列 y に対し，次式が成り立つ．

$$I_{\Delta(\tilde{c},c^*|\hat{c})} = \begin{cases} 1, & \sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\min}(y_i) \geq 0, \\ 0, & \sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\max}(y_i) \leq 0. \end{cases} \quad (18)$$

（証明）任意の状態系列 $s \in S^{n+1}$ について

$$\sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\min}(y_i) \leq \sum_{i|\tilde{c}_i=1} \ln \frac{P(y_i,\tilde{c}_i=1|s_{i-1})}{P(y_i,c_i^*=0|s_{i-1})} \leq \sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\max}(y_i), \quad (19)$$

かつ $P(s|y,\hat{c}) \geq 0$ であるから，補題が成り立つ． □

さて，この補題の性質を用いて $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ を推定することを考える．補題の条件が成り立つかどうかは，$\tilde{c}_i = 1$ となる i についてのみ y_i が分かればよい．いま $\{i|\tilde{c}_i = 1\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_w\}, w = w_H(\tilde{c})$，とおき，$j < j'$ について $i_j < i_{j'}$ とする．ただし $w_H(a)$ はベクトル a の Hamming 重みを表す．ここでシミュレーションの計算量を削減するため，y_{i_j} の生成方法について述べる．

y_{i_j} に影響を与えるのは，式 (1),(2) より s_{i_j-1} である．そこでこの確率を評価するために，HMM 通信路の状態遷移確率行列を $M = [P(s_t = j|s_{t-1} = i)]$ とし，M の j 列を m_j^{col} と置く．また単位ベクトル $e_i = (e_1, e_2, \ldots, e_S)$ を

$$e_j = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \quad (20)$$

と定義する．このとき明らかに

$$P(s_{i_1-1}) = \begin{cases} \pi M^{i_1-2} m^{col}_{s_{i_1-1}}, & i_1 > 1, \\ \pi_{s_{i_1-1}}, & \text{otherwise}. \end{cases} \quad (21)$$

であるから，この分布に従って s_{i_1-1} を決定することができる．次に $s_{i_{j-1}-1}$ が決まったとき，s_{i_j-1} の確率は

$$P(s_{i_j-1}|s_{i_{j-1}-1}) = e_{s_{i_{j-1}-1}} M^{i_j-i_{j-1}-1} m^{col}_{s_{i_j-1}}, \quad (22)$$

となる．以上の確率分布を用いて，状態系列 $s_{i_j-1}, j = 1,2,\ldots,w$，を決めることができる[2]．

状態系列 $s_{i_j-1}, j = 1,2,\ldots,w$，が決まれば，$y_{i_j}$ は $P(y_{i_j}|c^*_{i_j} = 0, s_{i_j-1})$ に従って容易に発生させることができる．このとき補題の条件 $\sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\min}(y_i) \geq 0$ あるいは $\sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\max}(y_i) \leq 0$ であった場合，補題より $I_{\Delta(\tilde{c},c^*|\hat{c})}$ の値は一意に定まる．従って，この補題の条件が当てはまる y_{i_j} については，1 回のシミュレーションに必要となる計算量が $O(w_H(\tilde{c}))$ 程度にまで低減できる．

一方，$\sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\min}(y_i) < 0$ かつ $\sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\max}(y_i) > 0$ であった場合，補題を用いることはできない．このときは式 (14) を用いて式 (15) を計算する必要がある．いま系列 $s_{i_j-1}, y_{i_j}, j = 1,2,\ldots,w$，はすでに決まっている．そこでこれらが得られているもとで，$s_{i-1}, y_i, i \in \{i|\tilde{c}_i = 0\}$，を決める必要がある．まず $0 < i_1 - 1$ のとき

$$P(s_0|s_{i_1-1}) = \frac{e_{s_0} M^{i_1-2} m^{col}_{s_{i_1-1}}}{P(s_{i_1-1})}, \quad (23)$$

の分布に従って s_0 を決定できる．次に $i_{j-1} - 1 < i < i_j - 1$ なる i に対し，s_{i-1} が決まっていたとき，s_i となる確率は

$$P(s_i|s_{i-1}, s_{i_j-1}) = \frac{P(s_i|s_{i-1})P(s_{i_j-1}|s_i)}{P(s_{i_j-1}|s_{i-1})}, \quad (24)$$

となる．ここで右辺のそれぞれの値は式 (22) の変数を換えて用いることにより容易に計算することができる．この分布に従って s_i を決めることができる．

結果的に，全ての $s_{i-1}, i \in \{i|\tilde{c}_i = 0\}$，を決めることができ，またこれを用いて $y_i, i \in \{i|\tilde{c}_i = 0\}$，も決められる．

以上の議論を元に，$P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ の推定法を提案する．

[$P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ 推定法 2]

1) $N_{\mathcal{E}}$=0;
2) for ($l = 1$; $l \leq L$; l++){
3) 式 (21),(22) の分布に従って $s^{(l)}_{i_j-1}, j = 1,2,\ldots,w$，を 1 つ生成．
4) $P(y_{i_j}|c^*_{i_j} = 0, s^{(l)}_{i_j-1})$ の分布に従って $y^{(l)}_{i_j}, j = 1,2,\ldots,w$，を 1 つ生成．
5) if($\sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\min}(y_i^{(l)}) \geq 0$) $N_{\mathcal{E}}$++;
6) else if($\sum_{i|\tilde{c}_i=1} L_{\max}(y_i^{(l)}) > 0$){
7) 式 (23),(24) の分布に従って $s^{(l)}_{i-1}, i \in \{i|\tilde{c}_i = 0\}$，を 1 つ生成．
8) $i \in \{i|\tilde{c}_i = 0\}$ に対し，$s^{(l)}_{i-1}$ を用いて $y_i^{(l)}$ を 1 つ生成．
9) $y^{(l)}$ に対して次式を計算．

$$N_{\mathcal{E}} \mathrel{+}= I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^{(0)})} I_{\Delta(\tilde{c},c^*|\hat{c})} + \left(1 - I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^{(0)})}\right) I_{\Delta(\tilde{c},c^*|c^*)}. \quad (25)$$

10) }
11) }
12) $\hat{P}_{\mathcal{E}}(\tilde{c}) = N_{\mathcal{E}}/L$ と推定する． □

この推定法は，推定法 1 と比較すると推定精度を変えずに計算量を大幅に低減することができる．

3.3 復号誤り確率の評価法

本節では式 (13) の $P_{\mathcal{E}}^{UB}$ について考える．しかし残念ながら，式 (13) のように全ての符号語に対して前節の $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ の推定を行うことは困難である．そこで通常の復号誤り確率の評価と同様に，次の近似式を考える．

$$P_{\mathcal{E}}^{Ap}(W) = \sum_{\tilde{c}\in C|0<w_H(\tilde{c})\leq W} P_{\mathcal{E}}(\tilde{c}). \quad (26)$$

巡回符号や畳込み符号のような規則性の高い符号に対しては，$P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ が同じ値となる（あるいはほぼ同程度と考えられる）符号語に分割し，式 (26) を直接求めることが考えられる．この方法は式 (26) の W が小さい場合，あるいは符号長が短い場合には有効と考えられる．しかし符号長が大きくなると分割数もかなり大きくなることが予想され，全ての分割パターンに対して式 (26) を求めることは難しいと思われる．

[2] $M^t m_j^{col}, t = 1,2,\ldots,n-w, j = 1,2,\ldots,S$，はあらかじめ計算し，記憶しておく．

そこで，符号の構造を仮定せずに復号誤り確率の評価を行えるように，本稿では符号語の送信前にユニバーサルなインタリーブを行うことを仮定する．具体的には，重み w の任意の符号語は，$1/\binom{n}{w}$ の確率で重み w の任意の系列にインタリーブされることを仮定する．

$D_{\min}$ を符号の最小距離とし，A_w を重み w の符号語数とすると，以下の方法で $P_{\mathcal{E}}^{Ap}(W)$ を推定することができる．

[$P_{\mathcal{E}}^{Ap}(W)$ の推定法]

1) $\hat{P}_{\mathcal{E}}^{Ap}(W) = 0$;
2) for ($w = D_{\min}$; $w \leq W$; w++){
3) $\quad P_{\mathrm{sum}} = 0$;
4) $\quad$ for ($m = 1$; $m \leq M$; m++){
5) $\quad\quad$ 重み w の任意の系列 $\tilde{c}$ を $1/\binom{n}{w}$ の確率で生成．
6) $\quad\quad$ $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ 推定法 2 を用いて $\hat{P}_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ を求める．
7) $\quad\quad$ $P_{\mathrm{sum}} += \hat{P}_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$;
8) $\quad$ }
9) $\quad \hat{P}_{\mathcal{E}}^{Ap}(W) += A_w P_{\mathrm{sum}}/M$;
10) } □

さて，最後に計算量について考える．まず W が大きくなるに従ってシミュレーションの計算量が増えるのは明らかであるが，$w_H(\tilde{c})$ が大きくなるに従って $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ の値は一般に小さくなるため，そのときは $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ 推定法 2 における L の値を大きくする必要がある．

逆に SNR が大きくなるに従って補題の条件が成り立つ確率が高くなることは容易に分かり，補題が成り立つときの 1 回のシミュレーションの計算量は $O(w_H(\tilde{c}))$ で済む．また SNR が大きくなるに従い，$P_{\mathcal{E}}^{Ap}(W)$ における大きな重みの符号語の $P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ の影響は小さくなる．従って SNR が大きくなるに従い W の値は小さくすることができる．

以上の議論より，本節で述べた EM 復号法の復号誤り確率の評価法は，SNR が大きくなるに従って効果を発揮することが分かる．ただし SNR が小さい場合には通常の EM 復号を繰返し行って復号誤り確率を求めることができる．従って，本節の手法は通常の EM 復号を繰り返すシミュレーションでは評価することが難しい SNR に対して，効果を発揮すると考えられる．

4 ターボ符号に対する EM 復号法

本節では HMM 通信路に対する EM 復号法を改良し，ターボ符号へ応用することを考える．ターボ復号では各 i に対して分布 $\hat{P}(c_i)$ を出力することができる．これを積極的に用いる EM 復号を提案する．

まず式 (3) の Q 関数の定義を変え，$\hat{P}(c_i), i \in [1, n]$, が得られた元で次の期待値をとる $\tilde{Q}$ 関数を定義する．

$$\tilde{Q}(c|\hat{P}(c_i), i \in [1,n]) = E_{s,c'}[\ln P(y,c,s)|y, \hat{P}(c'_i), i \in [1,n]]. \quad (27)$$

ただしこの式の c' に対する期待値には，$\hat{P}(c') = \prod_{i=1}^{n} \hat{P}(c'_i)$ と各ビットの独立性を仮定した分布を用いる．このとき $\tilde{Q}$ 関数の最大化は，次の関数の最大化に帰着される．

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s \in S^{n+1}} \sum_{C' \in \{0,1\}^n} P(s, c'|y) \ln P(y, c|s) \\
&= \frac{1}{P(y)} \sum_{s \in S^{n+1}} P(s) \ln P(y, c|s) \sum_{C' \in \{0,1\}^n} P(y|s, c')\hat{P}(c') \\
&= \frac{1}{P(y)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{s \in S^{n+1}} P(s) \ln P(y_i, c_i|s_{i-1}) \times \\
&\qquad \prod_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{c'_j \in \{0,1\}} P(y_j|s_{j-1}, c'_j)\hat{P}(c'_j) \right\} \\
&= \frac{1}{P(y)} \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}(c_i). \qquad (28)
\end{aligned}$$

そこで，各ビットの確率に対する対数比を

$$\ln \frac{\hat{P}(c_i = 1, y_i)}{\hat{P}(c_i = 0, y_i)} = \frac{1}{P(y)} \{\tilde{f}(c_i = 1) - \tilde{f}(c_i = 0)\}, \quad (29)$$

と置き換え，これをターボ復号時の枝メトリックに利用することにより，$\tilde{Q}$ 関数の最大化問題の近似解を求めることが可能である．

5 むすび

本稿では EM 復号法の復号誤り確率を評価する手法について述べた．復号誤り確率の式を積分と和の操作により陽に求めることは困難なため，モンテカルロシミュレーションにより高速に評価する手法を提案した．この手法は確率的に計算量が削減される手法なため，その効果は SNR が大きなところでより効果的となる．

ただし SNR が極端に大きくなると，$P_{\mathcal{E}}(\tilde{c})$ が極端に小さな値となるため，誤る事象を発生させるためにかなり多くのシミュレーション回数を必要とする．従って今後の課題としては，インポータンスサンプリングなどの手法を取り入れ，より少ない計算量で復号誤り確率を正確に評価する手法を考える必要がある．

謝辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費 No.18560391 及び早稲田大学特定課題 No.2006B-293 の助成による．

参考文献

[1] W.Turin, "MAP Decoding in Channels with Memory," IEEE Trans. Commun., vol.48, no.5, pp.757-763, May 2000.

[2] H.Yagi, T.Matsushima, S.Hirasawa, "Efficient Reliability-Based Soft Decision Decoding Algorithm over Markov Modulated Channel, " in Proc. of ISITA 2004, pp.823-826, Parma, Italy, Oct. 2004.

[3] H.Ogiwara and M.Kasawa, "Performance Evaluation of Turbo Codes with Code-Matched Interleaver over Inter-Symbol Interference Channel," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E85-A, no.10, pp.2203-2210, Oct. 2002.

[4] Y.Kagyo and H.Ogiwara, "バースト雑音通信路における LDPC 符号の復号," 第 28 回情報理論とその応用学会論文集, pp.239-242, Nov. 2005.