

判定基準 LR+Th を用いたブロック符号の帰還誤り指数の改善

新家 稔央<sup>†a)</sup>      松嶋 敏泰<sup>††</sup>      平澤 茂一<sup>††</sup>

On Improvement of Error Exponents for Decision Feedback Scheme with LR+Th

Toshihiro NIINOMI<sup>†a)</sup>, Toshiyasu MATSUSHIMA<sup>††</sup>, and Shigeichi HIRASAWA<sup>††</sup>

あらまし 判定帰還方式 (ARQ 方式) の研究の中で, ランダム符号化によって符号化定理を導き, あるクラスの符号に対して誤り指数の下界を求める研究がある. 最近, Hashimoto [1] は, 判定基準 LR+Th を用いた判定帰還方式が Forney のブロック符号の帰還誤り指数 (feedback exponent) [5] を達成することを示した. 本論文では, ブロック符号を用いた LR+Th を用いた判定帰還方式の誤り指数導出において, 文献 [4] において行われた解析の手法を一部適用する. その結果, Forney のブロック符号の帰還誤り指数の下界よりも, 更に大きな値の帰還誤り指数の下界が導出できる通信路の例があることを明らかにする.

キーワード ランダム符号化, 判定帰還方式 (ARQ 方式), LR+Th, 帰還誤り指数

1. ま え が き

受信側で受信系列の信頼性を判断し, 信頼度が低いと判定 (消失判定) した場合に再送を要求する判定帰還方式 (ARQ 方式) は, 理論面, 実用面から様々な研究が行われてきた. その中で, ランダム符号化によって符号化定理を導くことにより, いくつかのクラスの符号に対して誤り指数の下界を求める研究がある [1] ~ [9].

これらの中で, Forney [5] は, 初めて Neyman と Pearson の基本補題に沿う判定基準を用い, ブロック符号に対する判定帰還方式の誤り指数を導出した. 多くの離散的無記憶通信路で, この誤り指数は非常に大きい値をもつことが知られ, 文献 [1] では, Forney [5] の誤り指数に漸近的に到達できる判定帰還方式を最適と定義している.

本論文では, Forney の [5] に示されるブロック符号の帰還誤り指数 (feedback exponent) の下界より大きな誤り指数が得られるという意味で, 下界が改善で

きることを明らかにする. このことは, 文献 [4] で行われた解析の方法を, 最近提案された Hashimoto [1] の判定基準 LR+Th を用いた方式の解析に一部適用することで示すことができる. この誤り指数の数値例を, 強雑音通信路及び二元対称通信路において示す.

なお, 通信路は離散的無記憶通信路を仮定し, 帰還通信路に雑音は生じないものとして新しい誤り指数の下界の導出を行う.

2. 従来の研究

通信路への入力シンボルを  $i \in \mathcal{A}$ , 出力シンボルを  $j \in \mathcal{B}$  とし, 離散的無記憶通信路の通信路行列を  $\{P_{ij}\}$ ,  $i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{B}$ , ランダム符号化に用いる通信路シンボルの分布を  $\{q_i\}$ ,  $i \in \mathcal{A}$  とする. また, 符号長  $N$ , 情報伝送速度  $R$  (nat/symbol), 符号語数  $M = e^{NR}$  のブロック符号を仮定する. ブロック符号における受信系列を  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}^N$  とし, メッセージ  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) に対する符号語を  $\mathbf{x}_m \in \mathcal{A}^N$  とする. 更に, すべての符号語の中で  $i$  番目にゆう度の大きい符号語のゆう度を  $P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(i)})$  と書くことにする.

受信側では, 受信された系列を復号するか (Accept) 廃棄するか (Reject) が, 後述する判定基準によって判断される. 判定帰還方式においては, 受信側で一つのメッセージも復号せずに, 再送要求を行う場合がある. このような出力を行う復号のことを, 消失判定

<sup>†</sup> 神奈川工科大学情報学部情報ネットワーク工学科, 厚木市  
Dept of Information Network Engineering, Kanagawa Institute of Technology, 1030 Shimo-ogino, Atsugi-shi, 243-0292 Japan

<sup>††</sup> 早稲田大学理工学部経営システム工学科, 東京都  
Dept of IE and Management Systems, School of Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Ohkubo, Shinjyuku-ku, Tokyo, 169-0072 Japan

a) E-mail: niinomi@nw.kanagawa-it.ac.jp

(erasure) [5] を行う復号と呼ぶ<sup>(注1)</sup>。

Forney [5] では、ブロック符号において、このような消失判定を行う際、次の判定基準を用い、判定帰還方式における符号化定理を導出した。

$$\frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(1)})}{\sum_{\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_{(1)}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)} \geq \Delta \implies \text{Accept}$$

else *Reject* (1)

この判定基準は、Neyman と Peason の基本補題に沿った基準であり、復号誤り確率を固定したもとの最も再送要求の確率を小さくする意味の最適な基準である。また、この判定基準の式に変形を加えれば、事後確率最大の符号語に対してしきい値を設定した基準と解釈することができる [1], [5]。

式 (1) の基準を畳込み符号などの構造をもった符号に適用することも可能である。しかし、消失判定を行わない場合の復号と比較すると、判定基準の計算のために必要な計算量が決して少なくない。これは、ブロック符号の場合と異なり、符号の構造を効率良く利用した Viterbi アルゴリズム (VA) などの利用が可能ないゆえに生じる問題である。そもそも、消失判定は復号の計算量を抑えながら復号誤り確率を小さくすることが目的であるから、判定基準のために計算量が大きくなるのでは本末転倒と見る見方もできる。したがって、近年の Raghavan and Baum [11] の方式<sup>(注2)</sup>が復号誤り確率固定のもとで再送要求の確率最少を達成しようとも、Yamamoto, Itoh [3] の方式が実際には有効とする見方がある。文献 [3] の方式は文献 [5] の判定基準を簡略的に行うゆ度比検定を用いており、これをブロック符号に対して適用するとすれば次のようになる<sup>(注3)</sup>。

$$\frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(1)})}{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(2)})} \geq \Delta \implies \text{Accept}$$

else *Reject* (2)

文献 [3] では、VA がトレリスの各ノードでサバイバを選ぶ過程でこの判定基準を用い、畳込み符号に対する消失判定を、わずかな計算量で実現した。

ところが式 (2) のゆ度比検定を用いて導出された誤り指数と、文献 [5] の判定基準を用いて導出された誤り指数を比較すると、一般に前者の値は小さく、限られた条件 [4] でしか一致しなかった。これに対し Hashimoto [1] は、畳込み符号や木符号に対して消失判定のために多大な計算量を増やさない意味で整合が

とれ、しかも Forney [5] の判定基準を用いたときと誤り指数が一致する判定基準を示した。この判定基準は、ゆ度比検定 (LR, 式 (4)) としきい値判定 (Th, 式 (3))<sup>(注4)</sup>を組み合わせたもので、LR+Th と呼ばれる。ブロック符号に適用した場合、この判定基準は次のようになる。

$$\frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(1)})}{\{M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho}\}^{\rho/\sigma}} \geq \Delta, \quad (3)$$

$$\text{and } \frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(1)})}{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(2)})} \geq \Delta \quad (4)$$

$\implies \text{Accept}$

else *Reject*

ただし、 $\sigma$  及び  $\rho$  を  $0 \leq \sigma \leq \rho \leq 1$  なる実数とし、 $q(\mathbf{x})$  を長さ  $N$  の通路シンボル  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^N$  に対してとる確率分布<sup>(注5)</sup>とする。式 (3) の分母は、受信系列  $\mathbf{y}$  だけの関数である。文献 [1] では、この関数を符号語数  $M$ 、任意の確率分布  $q(x)$ 、及び  $\sigma, \rho$  用いて記述している<sup>(注6)</sup>。

### 3. 新しい解析手法による LR+Th を用いた場合の帰還誤り指数下界の改善

以下では、離散的無記憶通信路 (DMCs) において LR+Th を用いた帰還誤り指数の下界の解析を行う。本論文では文献 [1] で行われている解析手法に加え、LR にかかわる部分では文献 [4] で用いられた手法を加えて解析を行う。すると、この誤り指数は、Forney [5] で得られた誤り指数の下界より、大きな値をとることが示せる。

#### 3.1 基本的な確率の定義

次の確率を定義する。

$P_x(m)$ : 再送要求が起きる確率

$P_e(m)$ :  $m$  でないメッセージが復号される確率

(注1): 消失判定は、判定帰還方式の再送要求に用いる他、接続符号の内部符号の復号などに用いられる。

(注2): この方式は、式 (1) の基準を畳込み符号に用いることと等価である [1]。

(注3): このゆ度比検定を最初に用いたのは、Forney [16] であり、畳込み符号ではなくブロック符号に対してである。

(注4): ブロック符号に対する判定基準として [5] より以前から、Gallager [14] やの Jelinek [15] のテキストで論じられている。

(注5):  $q(\mathbf{x})$  は、符号語だけでなく、すべての  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^N$  に対して定まる確率分布である。したがって、符号語に対する事前分布と混同しないよう注意したい。同様に式 (3) 分母では、 $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^N$  に対して和をとっており、符号語だけの和をとっていないことに注意されたい。

(注6):  $M$  は与えられた情報伝送速度  $R$  によって固定されるが、その他の  $q(\mathbf{x})$ 、及び  $\sigma, \rho$  については、ランダム符号化が行われたのち、誤り指数が最大化されるように定める。

更に, Forney [5] に習い,

$$P_{E_1}(m) = P_x(m) + P_e(m) \quad (5)$$

$$P_{E_2}(m) = P_e(m) \quad (6)$$

とする.  $P_{E_1}(m)$  は, 再送要求が起きる確率  $P_x(m)$  と復号誤りが生じる確率  $P_e(m)$  の和である. 判定帰還方式では, 一般に  $P_x(m) \gg P_e(m)$  であるので,  $P_{E_1}(m)$  は再送要求が起きる確率を非常によく近似する. また,  $P_{E_2}(m)$  は  $P_e(m)$  そのものであるが, しい値  $\Delta$  の値によって  $P_{E_1}(m)$  と  $P_{E_2}(m)$  の間にはトレードオフの関係があるため, 本論文でも文献 [5] に倣って, このような標記を用いる. 更に, これらの確率を  $P_*$  で表したとき, すべてのメッセージに対する平均を

$$P_* = \frac{1}{M} \sum_m P_*(m)$$

で定義する. ただし,  $*$   $\in \{x, e, E_1, E_2\}$ .

$P_{E_1}(m)$  は, LR によって *Reject* または復号誤りが起きる確率と, Th によって *Reject* または復号誤り起きる確率の和で上界できる. それぞれの確率を  $P_{E_1-LR}(m)$  及び  $P_{E_1-Th}(m)$  とすれば,

$$P_{E_1}(m) \leq P_{E_1-LR}(m) + P_{E_1-Th}(m) \quad (7)$$

が成り立つので, 右辺のそれぞれの項に対する上界を求めることによって,  $P_{E_1}(m)$  が上界できる.

### 3.2 帰還誤り指数の導出

前節で定義したそれぞれの確率に対して上界を求める. 以下では, チャーノフ上界に用いるパラメータを,  $\sigma_x \geq 0, \rho_x \geq 0, \sigma_e \geq 0, \rho_e \geq 0, 0 \leq \sigma \leq \rho \leq 1$  として用いる.

#### 3.2.1 $P_{E_1}$ の上界

$P_{E_1-LR}$  の上界は, LR のみによって *Reject* または復号誤りが起きる確率の上界であるから, この確率は文献 [1] p.81 右側の上から 5 行目の  $P_{ers}(\mathbf{x}, \mathcal{C})$  の上界式の第 1 項に等しい.

まず,  $\chi[\cdot]$  をインジケータ, すなわち,

$$\chi[\cdot] = \begin{cases} 1: [\cdot] \text{ の中に記述された命題が成立} \\ 0: \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義する. また,  $\max_{\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_m} P(\mathbf{y}|\bar{\mathbf{x}})$  を,  $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_m$  であるような最も大きい符号語のゆう度とする. このとき, 文献 [4] と同様の手法で  $P_{E_1-LR}$  の上界を行うと

次式が得られる.

$$\begin{aligned} P_{E_1-LR}(m) &\leq \sum_{\mathbf{y}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \chi \left[ \frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)}{\max_{\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_m} P(\mathbf{y}|\bar{\mathbf{x}})} \leq \Delta \right] \\ &\leq \sum_{\mathbf{y}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \left[ \sum_{i \neq m} \left\{ \frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)}{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)} \right\}^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right]^{\rho_x} \cdot \Delta^{\sigma_x} \end{aligned} \quad (8)$$

不等式  $E[a_i]^\rho \geq E[a_i^\rho], 0 \leq \rho \leq 1$  を用いたいで,  $0 \leq \rho_x \leq 1$  と制約をつけてランダム符号化を行うと,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} P_{E_1-LR} &\leq \sum_{\mathbf{y}} \overline{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)^{1-\sigma_x}} \left[ \sum_{i \neq m} \overline{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}}} \right]^{\rho_x} \cdot \Delta^{\sigma_x} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし, 各々の符号語にランダム符号化を施すことによって得られる平均を  $\overline{\cdot}$  で表す. よって,

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{y}} \overline{P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^a} \left( \overline{P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^b} \right)^c \\ &= \left\{ \sum_j \left( \sum_i q_i P_{ij}^a \right) \left( \sum_i q_i P_{ij}^b \right)^c \right\}^N \end{aligned}$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \mathcal{E} P_{E_1-LR} &\leq \exp - \left\{ N \left[ E_o(\sigma_x, \rho_x) - \rho_x R - \sigma_x \frac{\ln \Delta}{N} \right] \right\}, \\ E_o(\sigma_x, \rho_x) &= -\ln \sum_j \left( \sum_i q_i P_{ij}^{1-\sigma_x} \right) \left( \sum_i q_i P_{ij}^{\sigma_x/\rho_x} \right)^{\rho_x} \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる.

一方,  $P_{E_1-Th}$  の上界は, Th のみによって *Reject* または復号誤りが起きる確率の上界であるから, この確率は, 前節と同様, 文献 [1] p.81 右側の上から 5 行目の  $P_{ers}(\mathbf{x}, \mathcal{C})$  の上界式の第 2 項の上界と同様の導出方法を用いる. しかし, 文献 [1] が第 1 項と第 2 項で共通したチャーノフ上界のパラメータ  $s, \rho$  を使っているのに対し, 本論文では,  $P_{E_1-LR}$  の上界及び  $P_{E_1-Th}$  の上界において異なる四つのパラメータを用いていることに注意したい.

以下の不等式において、インジケータ  $\chi[\cdot]$  に対してチャーノフ上界をとり、そのパラメータを  $\sigma$  にとれば、

$$\begin{aligned}
 P_{E_1-Th}(m) &\leq \sum_{\mathbf{y}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \\
 &\cdot \chi \left[ \frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)}{\{M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho}\}^{\rho/\sigma}} \leq \Delta \right] \\
 &\leq \sum_{\mathbf{y}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \left[ \frac{\{M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho}\}^{\rho/\sigma}}{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)} \right]^{\sigma} \\
 &\cdot \Delta^{\sigma} \\
 &= \sum_{\mathbf{y}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)^{1-\sigma} \left[ M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho} \right]^{\rho} \\
 &\cdot \Delta^{\sigma} \tag{11}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、ランダム符号化を施せば、

$$\mathcal{E}P_{E_1-Th} \leq \exp \left\{ -N \left[ E_o(\sigma, \rho) - \rho R - \sigma \frac{\ln \Delta}{N} \right] \right\} \tag{12}$$

が得られる。

### 3.2.2 $P_{E_2}$ の上界

$P_{E_2}$  の上界においても、チャーノフ上界のための異なる四つのパラメータを用いる。これは、文献 [4] におけるチャーノフ上界の方法を模倣したことによる。

復号誤りとなる条件は、実際に送信したメッセージを  $m$  としたとき、 $\mathbf{x}_{(1)} \neq \mathbf{x}_m$  であるような  $\mathbf{x}_{(1)}$  に対して以下の式 (13), (14) が同時に成り立つことである。

$$\frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(1)})}{\{M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho}\}^{\rho/\sigma}} \geq \Delta, \tag{13}$$

$$\frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(1)})}{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)} \geq \Delta. \tag{14}$$

よって、 $P_{E_2}(m)$  は、次のように上界できる。

$$\begin{aligned}
 P_{E_2}(m) &\leq \sum_{\mathbf{y}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \\
 &\cdot \chi \left[ \frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(1)})}{\{M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho}\}^{\rho/\sigma}} \geq \Delta, \right. \\
 &\left. \frac{\max_{i \neq m} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)}{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)} \geq \Delta \right] \tag{15}
 \end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_{(1)}) &= \max_{i \neq m} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) \\
 &\leq \left\{ \sum_{i \neq m} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)^{1/t} \right\}^t, \quad t \geq 0. \tag{16}
 \end{aligned}$$

を用いると  $\beta \geq 0$  に対し、チャーノフ上界をとることにより、

$$\begin{aligned}
 P_{E_2}(m) &\leq \sum_{\mathbf{y}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) \\
 &\cdot \left[ \sum_{i \neq m} \left\{ \frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)}{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)} \right\}^{\frac{\sigma_e}{\rho_e}} \cdot \Delta^{-\sigma_e/\rho_e} \right]^{\rho_e} \\
 &\cdot \left[ \frac{\left\{ \sum_{i \neq m} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)^{\sigma/\rho} \right\}^{\rho/\sigma}}{\left\{ M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho} \right\}^{\rho/\sigma}} \Delta^{-1} \right]^{\beta} \\
 &= \sum_{\mathbf{y}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)^{1-\sigma_e} \left[ \sum_{i \neq m} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)^{\frac{\sigma_e}{\rho_e}} \right]^{\rho_e} \\
 &\cdot \left[ \sum_{i \neq m} P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)^{\sigma/\rho} \right]^{\frac{\rho}{\sigma} \beta} \\
 &\cdot \left[ M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho} \right]^{-\frac{\rho}{\sigma} \beta} \\
 &\cdot \Delta^{-\sigma_e} \cdot \Delta^{-\beta} \tag{17}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

不等式  $E[a_i]^\rho \geq E[a_i^\rho]$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  を用いたの  
で、 $0 \leq \rho_e \leq 1$ ,  $0 \leq \frac{\rho}{\sigma} \beta \leq 1$  と制約をつける。ランダム符号化を行うと、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}P_{E_2} &\leq \sum_{\mathbf{y}} \overline{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m)^{1-\sigma_e}} \left[ e^{NR} \overline{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)^{\frac{\sigma_e}{\rho_e}}} \right]^{\rho_e} \\
 &\cdot \left[ (M-1) \overline{P(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)^{\sigma/\rho}} \right]^{\frac{\rho}{\sigma} \beta} \\
 &\cdot \left[ M \sum_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) \overline{P(\mathbf{y}|\mathbf{x})^{\sigma/\rho}} \right]^{-\frac{\rho}{\sigma} \beta} \\
 &\cdot \Delta^{-\sigma_e} \cdot \Delta^{-\beta} \\
 &\leq \exp - \left\{ N \left[ E_o(\sigma_e, \rho_e) - \rho_e R + \sigma_e \frac{\ln \Delta}{N} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \beta \frac{\ln \Delta}{N} \right] \right\} \tag{18}
 \end{aligned}$$

### 3.2.3 しきい値の操作による誤り指数の最大化

以下では、Forney [5] による帰還誤り指数の定義と同様、可能な限りしきい値  $\frac{\ln \Delta}{N}$  の値を大きくと

り、復号誤り確率に対する指数部の値の最大化をする．すなわち、 $-\frac{1}{N} \ln P_{E_1} \rightarrow 0$  のもとで達成し得る最も大きな  $-\frac{1}{N} \ln P_{E_2}$  の下界を導出する．そこで、 $-\frac{1}{N} \ln P_{E_1-LR} \rightarrow 0$  及び  $-\frac{1}{N} \ln P_{E_1-Th} \rightarrow 0$  となるように  $\frac{\ln \Delta}{N}$  を設定する．

$$-\frac{1}{N} \ln P_{E_1-LR} \rightarrow 0 \text{ としたとき,}$$

$$\frac{\ln \Delta}{N} = \frac{E_o(\sigma_x, \rho_x)}{\sigma_x} - \frac{\rho_x}{\sigma_x} R \quad (19)$$

であるが、最大化のためには、 $E_o(\sigma_x, \rho_x)$  が  $\sigma_x$  に対して上に凸な関数であることから [5]、 $\sigma_x \rightarrow 0$  と極限をとればよい．そこで、文献 [5] と同様、ロピタルの定理を用いて、

$$\frac{E_o(\sigma_x, \rho_x)}{\sigma_x} \rightarrow E_{oF}(\nu_x),$$

$$\nu_x = \rho_x / \sigma_x \geq 0,$$

$$E_{oF}(\nu_x) = \sum_j \sum_i q_i P_{ij} \ln \left[ \frac{P_{ij}^{1/\nu_x}}{\sum_k q_i P_{kj}^{1/\nu_x}} \right]^{\nu_x} \quad (20)$$

より、しきい値の上界は

$$\frac{\ln \Delta}{N} = \max_{\nu_x \geq 0} [E_{oF}(\nu_x) - \nu_x R] \quad (21)$$

に対して  $\nu_x$  を最適化したものとなる<sup>(注7)</sup>．一方、 $-\frac{1}{N} \ln P_{E_1-Th} \rightarrow 0$  としたときも同様に  $\sigma \rightarrow 0$  と極限をとればよい．すなわち、

$$\frac{E_o(\sigma, \rho)}{\sigma} \rightarrow E_{oF}(\nu)$$

$$\nu = \rho / \sigma \geq 1 \quad (22)$$

より、

$$\frac{\ln \Delta}{N} = \max_{\nu \geq 1} [E_{oF}(\nu) - \nu R] \quad (23)$$

である．したがって、両者より導かれる  $\frac{\ln \Delta}{N}$  はともに等しく、これを  $E_f(R)$  とおく<sup>(注8)</sup>．また、

$$E_1(R) = \max_D [E_o(\sigma_e, \rho_e) - \rho_e R + \sigma_e E_f(R)]$$

$$D = \{\sigma_e \geq 0, 0 \leq \rho_e \leq 1\} \quad (24)$$

とおく<sup>(注9)</sup>．

チャーノフ上界を行うために導入したパラメータ  $\beta$  に対する制約は、

$$0 \leq \beta \leq \frac{\sigma}{\rho} = 1/\nu \quad (25)$$

であったので、まとめると次の定理を得る．

[定理] 判定基準 LR+Th を用いたとき、少なくとも次の帰還誤り指数  $E_{LR+Th}(R)$  を達成するブロック符号が存在する．

$$E_{LR+Th}(R) = E_1(R) + \frac{E_f(R)}{\nu},$$

$$\nu = \arg \max_{\nu \geq 1} [E_{oF}(\nu) - \nu R] \quad (26)$$

### 3.3 数値例

強雑音通信路 (VNC) において、 $q_i$  を最適化して得られる通信路容量  $C$  を仮定すると、

$$E_o(\sigma, \rho) = \sigma \left[ 2 - \sigma \left( 1 + \frac{1}{\rho} \right) \right] C \quad (27)$$

$$E_{oF}(\nu) = \left( 2 - \frac{1}{\nu} \right) C \quad (28)$$

$$E_f(R) = 2C - 2\sqrt{RC} \quad (29)$$

$$\nu = \arg \max_{\nu \geq 1} [E_{oF}(\nu) - \nu R] = \sqrt{\frac{C}{R}} \quad (30)$$

であるので、これより、 $E_{LR+Th}(R)$  を数値計算すると、図 1 に示すようになる．

図 1 において、 $E_1(R)$  は文献 [4] による LR の判定基準を用いて導出された帰還誤り指数である．このように VNC においては、LR+Th を用いることによ

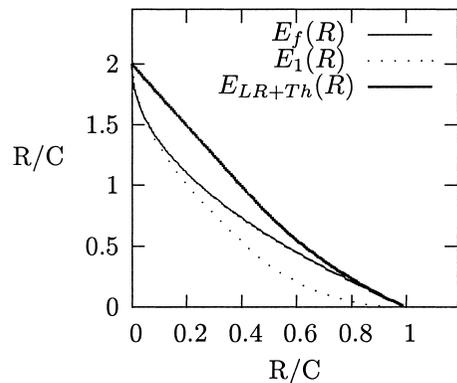


図 1 VNC における誤り指数  
Fig. 1 Exponents for VNC.

(注7):  $\nu_x \geq 0$  を  $\nu_x \geq 1$  と制約を変えても、 $[E_{oF}(\nu_x) - \nu_x R]$  の最大値は変わらない [4] .

(注8):  $E_f(R)$  は、Forney のブロック符号における帰還誤り指数 [5] の式 (54) に等しい .

(注9):  $E_1(R)$  は、LR を単独で判定基準に用いたときのブロック符号に適用したときの誤り指数 [4] である .

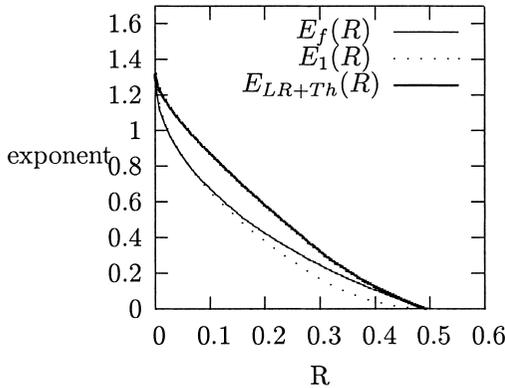


図 2 BSC ( $\epsilon = 0.05$ ) における誤り指数  
Fig. 2 Exponents for BSC.

て文献 [5] の誤り指数の下界  $E_f(R)$  の改善をできることが分かる。

また、誤り確率  $\epsilon$  の二元対称通信路 (BSC) を仮定し、 $\epsilon = 0.05$ ,  $C = 0.945$  (nats/symbol) における  $E_{LR+Th}(R)$  を数値計算すると、図 2 に示すようになる。したがって、BSC においても VNC と同様に、LR+Th を用いることによって誤り指数の下界  $E_f(R)$  の改善をできることが分かる。

#### 4. む す び

本論文では、判定基準 LR+Th による判定帰還に対して、[4] における解析の手法を部分的に加えたとき、ブロック符号における帰還誤り指数の下界が改善されることを示した。誤り指数の下界  $E_f(R)$  が、最適な判定基準 FR を用いて導かれているにもかかわらず、これに準拠した LR+Th を用いて下界を改善できたことは興味深い。

また、帰還誤り指数下界の改善に対しては、上界との比較を行いたいのであるが、上界を評価すること自体が難しく、過去のものにその結果が出ていない。したがって、本論文においても、下界と上界と比較については、依然として今後の課題となっている。

しかしながら、このような状況において、Forney [5] の下界  $E_f(R)$  を改善する例を、本論文が初めて示せたことを特に重要と考える。

#### 文 献

- [1] T. Hashimoto, "Composite scheme LR + Th for decoding with erasures and its effective equivalence to Forney's rule," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.45, no.1, pp.78–93, Jan. 1999.
- [2] T. Hashimoto, "A list-type reduced-constraint generalization of the Viterbi algorithm," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-33, no.6, pp.866–876, Nov. 1987.
- [3] H. Yamamoto and K. Itoh, "Vitebi decoding algorithm for convolutional codes with repeat request," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-26, no.5, pp.540–547, Sept. 1980.
- [4] T. Hashimoto, "On the error exponent of convolutionally coded ARQ," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.40, no.2, pp.567–575, March 1994.
- [5] G.D. Forney, Jr., "Exponential error bounds for erasure, list and decision feedback schemes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-14, no.2, pp.206–220, March 1968.
- [6] L.I. Bluestein, "Exponential error bounds for discrete memoryless channels with sequential decision feedback," Inf. Control, vol.16, no.4, pp.222–266, July 1974.
- [7] R.J. Fang, "Lower bounds on reliability functions of variable-length nonsystematic convolutional codes for channels with noiseless feedback," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-17, no.2, pp.161–171, March 1971.
- [8] A. Drukarev, "Hybrid ARQ error control using sequential decoding," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-23, no.4, pp.311–318, 1970.
- [9] T. Hashimoto, "A coded ARQ scheme with the generalized Viterbi algorithm," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.39, no.2, pp.423–432, March 1993.
- [10] G.D. Forney, Jr., "Convolutional codes II: Maximum likelihood decoding," Inf. Control, vol.25, no.3, pp.222–266, July 1974.
- [11] A.R. Raghavan and C.W. Baum, "A reliability output Viterbi algorithm with applications to hybrid ARQ," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.44, no.3, pp.1214–1216, May 1998.
- [12] S. Hirasawa and M. Kasahara, "Exponential error bounds for decision feedback schemes using convolutional codes," Proc. 1988 IEEE Int. Symp. Inform. Theory, p.93, Kobe, Japan, 1988.
- [13] A.J. Viterbi and J.K. Omura, Principles of Communication and Coding, McGraw-Hill, NY, 1979.
- [14] R.G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication, Wiley, NY, 1968.
- [15] F. Jelinek, Probabilistic Information Theory, McGraw-Hill, NY, 1968.
- [16] G.D. Forney, Jr., Concatenated codes, M.I.T., MA, 1966.
- [17] T. Niinomi, T. Matsushima, and S. Hirasawa, "On analysis of noiseless decision feedback scheme using fixed size list decoder for tree codes," Proc. 2000 IEEE Int. Symp. Inform. Theory, Sorrento, Italy, 2000.
- [18] 新家稔央, 松嶋敏泰, 平澤茂一, "木符号におけるリスト復号法を用いた判定帰還方式について," 信学論 (A), vol.J83-A, no.1, pp.67–82, Jan. 2000.  
(平成 17 年 12 月 19 日受付, 18 年 6 月 16 日再受付, 8 月 24 日最終原稿受付)



### 新家 稔央 (正員)

昭 63 早大・理工・工業経営卒，平 2 同大理工学研究科修士課程了，平 2 同博士後期課程入学，平 5 同中退．平 3 早大理工学部助手，平 7 早大理工総研嘱託研究員，湘南工大，職業能力開発大非常勤講師．平 10 神奈川工科大電気電子工学科助手．平 12 同情報ネットワーク工学科助手．平 17 同専任講師．情報理論，特に通信路符号化について興味をもつ．情報理論とその応用学会，IEEE 各会員．



### 松嶋 敏泰 (正員)

昭 53 早大・理工・工業経営卒．昭 55 同大大学院修士課程了．同年，日本電気(株)入社．昭 61 早大・理工学研究科・博士後期課程入学．平 1 横浜商科大学講師．平 3 同大助教授．平 4 早大・理工学部・工業経営学科(現在経営システム工学科)助教授，平 9 同大教授，現在に至る．知識情報処理及び情報理論とその応用に関する研究に従事．工学博士．IEEE，情報理論とその応用学会，人工知能学会，情報処理学会，OR 学会，日本経営工学会等各会員．



### 平澤 茂一 (正員)

昭 36 早大・理工・数学卒．昭 38 同電気通信卒．同年三菱電機(株)入社．昭 56 早大・理工・工業経営学科(現在経営システム工学科)教授，現在に至る．情報理論とその応用，データ伝送方式，ならびに計算機応用システムの開発などの研究に従事．工学博士．昭 54 UCLA 計算機科学科客員研究員，昭 60 ハンガリー科学アカデミー，昭 61 伊トリエステ大学客員研究員．平 5 本会小林記念特別賞，業績賞受賞．IEEE Fellow，情報理論とその応用学会，人工知能学会，情報処理学会，OR 学会，日本経営工学会等各会員．