

Gilbert-Elliott 通信路に対する LDPC 符号のロバスト性に関する密度発展法
による解析Density Evolution Analysis of the Robustness for LDPC Codes over
Gilbert-Elliott Channel

小林 学* 松嶋 敏泰† 平澤 茂一†
Manabu KOBAYASHI Toshiyasu MATSUSHIMA Shigeichi HIRASAWA

Abstract— In this paper, we analyze the robustness for LDPC Codes over Gilbert-Elliott (GE) Channel. Then we propose the density evolution method for the case that LDPC decoder uses the erroneous parameters for GE channel. Using this method, we show the region of tuples of the true parameters and erroneous decoding parameters for GE channel that the decoding error probability approaches asymptotically to zero.

Keywords— LDPC Codes, Gilbert-Elliott Channel, Robustness, Density Evolution

1 まえがき

Gilbert-Elliott (GE) 通信路, あるいはより一般の隠れマルコフ雑音通信路に対して, 様々な LDPC 符号の復号法が提案されてきた [3, 4, 5]. さらに Eckford らは GE 通信路における LDPC 符号の漸近的な復号性能を解析する手法を提案した [6]. これは密度発展法 (Density Evolution) [1] に基づいており, 大変強力な解析手法である. 結果的に GE 通信路に対して漸近的に復号誤り確率を 0 とするパラメータのしきい値を求めることができ, また LDPC 符号及びその復号は通信路が独立と仮定して復号するよりも, 良い性能を示すことが解析的に示されている.

しかし従来は通信路の確率分布のパラメータは全て既知であり, これを陽に用いて復号が行われることが性能解析の前提であった. しかし実際の通信を考えると, 真のパラメータが常に既知であることは想定しにくい. 従って通常は何らかの方法で動的にパラメータを推定するか, あらかじめ統計をとって静的にパラメータを決めておく必要がある. このとき, 真のパラメータと異なるパラメータを用いて復号を行うとき (以降復号パラメータと呼ぶ), パラメータの誤差がどの程度までならば復号誤り確率に影響を与えないか, またその条件を知ることができれば, 復号パラメータの設計や推定方法, さらに符号の設計に役立てることができる.

そこで本稿では GE 通信路に対して文献 [6] の手法を拡張し, 真のパラメータと復号パラメータが異なる場合の密度発展法を提案する. またこれを用いて, 復号誤り

確率が漸的に 0 になる真のパラメータと復号パラメータのペアの範囲をいくつかの例に対して求める. 結果的に LDPC 符号が Gilbert-Elliott 通信路に対してどの程度ロバスト性を有するのかを解析し, 考察を行う.

2 GE 通信路と GE-LDPC 復号 [6]

定義 1 (d_v, d_c)2 元正則 LDPC 符号を C とする¹. 符号語 $\mathbf{X} \in C$ は通信路に送出され, 出力 $\mathbf{Y} \in \{0, 1\}^n$ を受け取り, 復号を行う. ここで $\mathbf{Z} \in \{0, 1\}^n$ を雑音系列として $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$ となる加法的雑音を仮定する. ただし和は排他的論理和である. GE 通信路において, 雑音系列 \mathbf{Z} は 2 状態隠れマルコフで発生する. すなわち状態集合 $\mathcal{S} = \{G, B\}$ に対して, 状態系列 $\mathbf{S} \in \mathcal{S}^n$ が存在し, $\eta_G = \Pr(Z_i = 1 | S_i = G), \eta_B = \Pr(Z_i = 1 | S_i = B)$ とする. また状態は各時点で決まった確率で遷移し, $g = \Pr(S_{i+1} = G | S_i = B)$ 及び $b = \Pr(S_{i+1} = B | S_i = G)$ とする. ここで状態遷移行列を以下で定義する.

$$P = \begin{bmatrix} 1-b & b \\ g & 1-g \end{bmatrix}. \quad (1)$$

□

この通信路に対して, Sum-Product アルゴリズム (SPA) を用いて LDPC 符号の復号を行うことができる. これを GE-LDPC 復号と呼ぶことにする.

定義 2 $h(x) = (-1)^x, x \in \{0, 1\}$, とし, $\gamma(\lambda, y)$ を次式で定義する.

$$\gamma(\lambda, y) = \frac{1}{2} \left[1 + h(y) \tanh \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right]. \quad (2)$$

さらに $N = \text{diag}[\eta_G, \eta_B]$ とし,

$$E(\lambda, y) = N(1 - \gamma(\lambda, y)) + (I - N)\gamma(\lambda, y), \quad (3)$$

とする. ただし I は単位行列である. □

GE-LDPC 復号ではまず, ある時点までの観測系列からの状態確率 (前進状態確率) $\mathbf{A}^- = (A_1^-, A_2^-)^T$ と, LDPC 符号に対する通常の SPA で出力される外部情報値 D を用いて, 次の時点の前進状態確率 $\mathbf{A} = (A_1, A_2)^T$

¹ 本稿では正則 LDPC 符号を仮定して議論を進めるが, 非正則への拡張は明らかである.

* 〒 251-8511 神奈川県藤沢市辻堂西海岸 1-1-25 湘南工科大学情報工学科 Department of Information Science, Shonan Institute of Technology, 1-1-25 Tsujido-Nishikaigan, Fujisawa, Kanagawa 251-8511 Japan. E-mail: kobayasi@info.shonan-it.ac.jp

を次式で再帰的に求める。ただし、 A_1^-, A_1 はそれぞれ G 状態の確率に対応している。

$$\mathbf{A} = \frac{P^T E(D, Y) \mathbf{A}^-}{\mathbf{u}^T P^T E(D, Y) \mathbf{A}^-}, \quad (4)$$

ただし分母は正規化のための定数であり、結果的に $A_1 + A_2 = 1$ となる。

同様に、受信系列の後方からある時点までの後退状態確率 $\mathbf{B}^- = (B_1^-, B_2^-)^T$ と外部情報値 D を用いて、一つ前の時点の後退状態確率 $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^T$ を次式で再帰的に求める。

$$\mathbf{B} = \frac{E(D, Y) P^T \mathbf{B}^-}{\mathbf{u}^T E(D, Y) P^T \mathbf{B}^-}, \quad (5)$$

これらの前進、後退の状態確率を用いて、通信路からの情報の対数尤度比として次式の値を SPA への入力として渡す。

$$C = h(Y) \log \frac{(\mathbf{A}^-)^T (I - N) P \mathbf{B}^-}{(\mathbf{A}^-)^T N P \mathbf{B}^-}. \quad (6)$$

このように、SPA からの入力をもとに通信路の状態を推定しつつ、その通信路の情報を SPA へ渡すことを繰り返している。この復号法は符号長が大きくなるに従って、漸近的に確率 1 で最適な復号となることが知られている [6]。

また通信路の確率分布の真のパラメータが既知として復号を行ったときに、漸近的に復号誤り確率が 0 となるパラメータを求める密度発展法が Eckford らによって提案されている [6]。

3 GE-LDPC 復号に対するロバスト性の解析手法

従来は通信路の確率分布の真のパラメータは全て既知であり、これを陽に用いて復号が行われることが性能解析の前提であった。しかし実際の通信を考えると、真のパラメータが常に既知であることは想定しにくい。そこで本節では GE 通信路に対して文献 [6] の手法を拡張し、真のパラメータと復号パラメータが異なる場合の密度発展法を提案する。

3.1 準備

定義 3 真の通信路パラメータを $\tilde{\theta} = (\tilde{g}, \tilde{b}, \tilde{\eta}_G, \tilde{\eta}_B)$ 、復号パラメータを $\hat{\theta} = (\hat{g}, \hat{b}, \hat{\eta}_G, \hat{\eta}_B)$ と書く。また $\tilde{\theta}$ や $\hat{\theta}$ の確率分布及び確率変数や実現値も同様にそれぞれ \tilde{a}, \hat{a} のように表す。特に $\tilde{p}(Y = 1|S = s) = \tilde{\eta}_s, \hat{p}(Y = 1|S = s) = \hat{\eta}_s, s \in \mathcal{S}$ 、と書く。また、定常確率 $\tilde{p}(S), \hat{p}(S), S \in \mathcal{S}$ 、についても、 $\tilde{p}(S = G) = \tilde{g}/(\tilde{g} + \tilde{b}), \hat{p}(S = G) = \hat{g}/(\hat{g} + \hat{b})$ である。□

密度発展法で解析を行うためには、(1) 符号長が十分に大きいもとで、有限回の繰り返し回数に対して復号木

が Cycle-Free であること、(2) 復号パラメータを用いて復号したときの SPA への入力である \hat{C} が対称性を持つこと、が条件となる。

(1) の条件は復号パラメータには依存しないため、従来と同様成り立つ。(2) に関しても、文献 [6] の対称性の議論において確率変数に $\hat{\theta}$ を代入することにより、成り立つことは容易に分かる。

従って (2) から、一般性を失うことなく全 0 の符号語を送信したと仮定して解析を行う。

3.2 前進状態確率及び後退状態確率の分布

任意のパラメータ $\theta = (g, b, \eta_G, \eta_B)$ に対して、前進状態確率が \mathbf{A}^- であったとき、式 (4) から次の時点の状態の確率 \mathbf{A} を θ の関数として次式で表現できる。

$$A_1(\theta, A_1^-) = \frac{N_1^A(\theta) + N_2^A(\theta) A_1^-}{D_1^A(\theta) + D_2^A(\theta) A_1^-}, \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} N_1^A(\theta) &= g(\eta_B + (1 - 2\eta_B)\gamma(D, Y)), \\ N_2^A(\theta) &= (1 - b)(\eta_G + (1 - 2\eta_G)\gamma(D, Y)) \\ &\quad - g(\eta_B + (1 - 2\eta_B)\gamma(D, Y)), \\ D_1^A(\theta) &= \eta_B + (1 - 2\eta_B)\gamma(D, Y), \\ D_2^A(\theta) &= (\eta_G + (1 - 2\eta_G)\gamma(D, Y)) \\ &\quad - \eta_B - (1 - 2\eta_B)\gamma(D, Y), \end{aligned} \quad (8)$$

である。ここで $A_1(\theta, A_1^-)$ は本来 D, Y にも依存するが、本稿では混同の恐れがないため省略する。

さて、ある時点の復号において前進状態確率が \hat{a}_1^- であったとき、上式から $\hat{a}_1 = A_1(\hat{\theta}, \hat{a}_1^-)$ である。密度発展法では \hat{a}_1 の確率密度関数 $f(\hat{a}_1)$ を求める必要があるが、そのためには、 \hat{a}_1^- の条件付確率 $P(s|\hat{a}_1^-), s \in \mathcal{S}$ 、が必要になる。もし $\hat{\theta} = \tilde{\theta}$ ならば、 $P(s|\hat{a}_1^-) = \hat{a}_1^-$ であるが、それ以外ではこれは成り立たず、一般的には $P(s|\hat{a}_1^-) = \tilde{a}_1^-$ である。ただし注意しなければならないのは、一般に \hat{a}_1^- から \tilde{a}_1^- は一意に定まらないことである。

そこで、 \tilde{A}_1^- 及び \hat{A}_1^- の同時確率密度関数 $f(\tilde{A}_1^-, \hat{A}_1^-)$ を導入する。この関数が求まっているときに、SPA からの出力 D の分布 $f(D)$ を用いて $f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1)$ を求めることを考える。まず $f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1)$ は真のパラメータで周辺和を取ることににより、次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{y \in \{0, 1\}} \tilde{p}(s) \tilde{p}(y|s) \\ &\quad \cdot \int_d f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1|s, y, d) f(d) dd. \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1|s, y, d)$ を求める必要があるが、 s, y, d が与えられた元で \tilde{a}_1, \hat{a}_1 が決まると、式 (7) より $\tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-$ も決まる。今式 (7) を用いて $A_1 = A_1(\theta, A_1^-)$ の逆関数

を $A_1^- = \mathcal{A}_1^-(\theta, A_1)$ と表すと、次式が成り立つ。

$$\mathcal{A}_1^-(\theta, A_1) = \frac{D_1^A(\theta)A_1 - N_1^A(\theta)}{N_2^A(\theta) - D_2^A(\theta)A_1}. \quad (10)$$

従って $s, y, d, \tilde{a}_1, \hat{a}_1$ が与えられると、

$$\tilde{a}_1^- = \mathcal{A}_1^-(\tilde{\theta}, \tilde{a}_1) \quad \hat{a}_1^- = \mathcal{A}_1^-(\hat{\theta}, \hat{a}_1), \quad (11)$$

として一意に定まることが確かめられる。さて、 s, y, d が与えられた元で $\tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-$ の分布を考えると、これは s が与えられた元では y 及び d とは独立であるから、 $f(\tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^- | s)$ が分かれば良い。ベイズの定理より

$$f(\tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^- | s) = p(s | \tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-) f(\tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-) / \mu, \quad (12)$$

$$\mu = \int_{\tilde{a}_1^-} \int_{\hat{a}_1^-} p(s | \tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-) f(\tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-) d\tilde{a}_1^- d\hat{a}_1^-, \quad (13)$$

が成り立つ。さてここで $p(s | \tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-)$ は $\tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-$ が両方分かっており、当然真のパラメータで決まるため、以下として求めることができる。

$$p(s | \tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^-) = \begin{cases} \tilde{a}_1^- & s = G, \\ 1 - \tilde{a}_1^- & s = B. \end{cases} \quad (14)$$

式 (9) ~ (14) の議論から、変数変換を行うことにより結果的に $f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1 | s, y, d)$ と $f(\tilde{a}_1^-, \hat{a}_1^- | s)$ を対応づけることができる。ここで式 (11) の関係から変数変換のためにヤコビ行列 J を求めると、

$$J = \begin{bmatrix} \partial \tilde{a}_1^- / \partial \tilde{a}_1 & \partial \tilde{a}_1^- / \partial \hat{a}_1 \\ \partial \hat{a}_1^- / \partial \tilde{a}_1 & \partial \hat{a}_1^- / \partial \hat{a}_1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

であるが、 $\partial \tilde{a}_1^- / \partial \tilde{a}_1 = \partial \hat{a}_1^- / \partial \hat{a}_1 = 0$ である。

今 $\mathcal{A}_1^{-\prime}(\theta, A_1) = \partial \mathcal{A}_1^-(\theta, A_1) / \partial A_1$ と書くと、

$$\mathcal{A}_1^{-\prime}(\theta, A_1) = \frac{D_1^A(\theta)N_2^A(\theta) - D_2^A(\theta)N_1^A(\theta)}{(N_2^A(\theta) - D_2^A(\theta)A_1)^2}, \quad (16)$$

となる。従ってヤコビアン $|J|$ は

$$|J| = \mathcal{A}_1^{-\prime}(\tilde{\theta}, \tilde{a}_1) \mathcal{A}_1^{-\prime}(\hat{\theta}, \hat{a}_1), \quad (17)$$

となる。これらの議論から、次式が成り立つ。

$$f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1 | s, y, d) = f(\mathcal{A}_1^-(\tilde{\theta}, \tilde{a}_1), \mathcal{A}_1^-(\hat{\theta}, \hat{a}_1) | s) \cdot |\mathcal{A}_1^{-\prime}(\tilde{\theta}, \tilde{a}_1) \mathcal{A}_1^{-\prime}(\hat{\theta}, \hat{a}_1)|. \quad (18)$$

以上の関係を用いて式 (9) を計算することができ、確率密度関数を更新することが可能となる。

同様の議論を行うことにより、後退状態確率の同時確率密度関数 $f(\tilde{b}_1, \hat{b}_1)$ も $f(\tilde{b}_1^-, \hat{b}_1^-)$ を用いて更新することが可能である。

3.3 通信路情報の確率密度関数

本節では通信路の状態確率から SPA へ渡す通信路情報 \hat{C} の確率密度関数 $f(\hat{C})$ を求める。

式 (6) から、 \hat{A}_1 及び \hat{B}_1 を用いて \hat{C} は次式で計算される。

$$\hat{C} = h(Y) \log \frac{\hat{N}_1^C + \hat{N}_2^C \hat{A}_1}{\hat{D}_1^C + \hat{D}_2^C \hat{A}_1}, \quad (19)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^C &= (1 - \hat{\eta}_B)(1 - \hat{g} - \hat{B}_1 - 2\hat{g}\hat{B}_1), \\ \hat{N}_2^C &= (1 - \hat{\eta}_G)(\hat{b} + (1 - 2\hat{b})\hat{B}_1) \\ &\quad - (1 - \hat{\eta}_B)(1 - \hat{g} - \hat{B}_1 - 2\hat{g}\hat{B}_1), \\ \hat{D}_1^C &= \hat{\eta}_B(1 - \hat{g} - \hat{B}_1 - 2\hat{g}\hat{B}_1), \\ \hat{D}_2^C &= \hat{\eta}_G(\hat{b} + (1 - 2\hat{b})\hat{B}_1) \\ &\quad - \hat{\eta}_B(1 - \hat{g} - \hat{B}_1 - 2\hat{g}\hat{B}_1), \end{aligned} \quad (20)$$

である。従って、 y 及び \hat{a}_1, \hat{b}_1 が与えられたとき、 \hat{c} は一意に決まる。逆に、 y 及び \hat{b}_1, \hat{c} が決まったときには、 \hat{a}_1 が定まる。式 (19) から、

$$\mathcal{A}_1^C(\hat{C}) = \frac{\hat{D}_1^C \exp\{h(Y)\hat{C}\} - \hat{N}_1^C}{\hat{N}_2^C - \hat{D}_2^C \exp\{h(Y)\hat{C}\}}. \quad (21)$$

と置くと、 $\hat{a}_1 = \mathcal{A}_1^C(\hat{c})$ として求めることができる。変数変換のためにこれを微分したものを求めると、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^{C\prime}(\hat{c}) &= \frac{d\mathcal{A}_1^C(\hat{c})}{d\hat{c}} \\ &= \frac{(\hat{D}_1^C \hat{N}_2^C - \hat{D}_2^C \hat{N}_1^C) \exp\{h(Y)\hat{C}\}}{(\hat{N}_2^C - \hat{D}_2^C \exp\{h(Y)\hat{C}\})^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

となる。結果的に、 y と \hat{a}_1 は状態 s の元で条件付独立であることを利用すると、式 (12) から求めることができる確率密度関数 $f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1 | s)$ と $f(\hat{c} | s, y, \hat{b}_1)$ を次式で対応付けることができる。

$$f(\hat{c} | s, y, \hat{b}_1) = \int_{\tilde{a}_1} f(\tilde{a}_1, \mathcal{A}_1^C(\hat{c}) | s) |\mathcal{A}_1^{C\prime}(\hat{c})| d\tilde{a}_1. \quad (23)$$

最終的に周辺和を求めることにより、次式で確率密度関数 $f(\hat{c})$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} f(\hat{c}) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{y \in \{0,1\}} \tilde{p}(s) \tilde{p}(y | s) \\ &\quad \cdot \int_{\tilde{b}_1} \int_{\hat{b}_1} f(\hat{c}_1 | s, y, \hat{b}_1) f(\tilde{b}_1, \hat{b}_1 | s) d\tilde{b}_1 d\hat{b}_1. \end{aligned} \quad (24)$$

3.4 通信路パラメータと復号パラメータが異なる場合の密度発展法

前節までの結果を踏まえて、通信路パラメータと復号パラメータが異なる場合の密度発展法を示す。以下において $\delta(\cdot)$ はディラックの δ 関数とし、 $\tilde{\eta}, \hat{\eta}$ はそれぞれのパラメータを用いた場合の平均シンボル誤り確率

$$\tilde{\eta} = \frac{\tilde{g}\tilde{\eta}_G + \tilde{b}\tilde{\eta}_B}{\tilde{g} + \tilde{b}} \quad \hat{\eta} = \frac{\hat{g}\hat{\eta}_G + \hat{b}\hat{\eta}_B}{\hat{g} + \hat{b}}, \quad (25)$$

とする。また、 $\mathcal{F}(f(X))$ は関数 $f(X)$ のフーリエ変換を、 $\mathcal{F}^{-1}(F(Y))$ は $F(Y)$ のフーリエ逆変換を表す。さらに、繰り返し回数の最大値を l_{\max} とし、 j 回目の復号誤り確率を $P_{\text{err}}(j)$ と表す。繰り返し回数が l_{\max} を超えるか、 $P_{\text{err}}(j)$ がある微小な値 ϵ より小さくなるまで繰り返す。

1) $j := 0$ とし、以下を初期密度関数とする。

$$\begin{aligned} f_{\hat{A}_1, \hat{A}_1}^{(0)}(\tilde{a}_1, \hat{a}_1) &= \delta\left(\tilde{a}_1 - \frac{\tilde{g}}{\tilde{g} + \tilde{b}}\right) \delta\left(\hat{a}_1 - \frac{\hat{g}}{\hat{g} + \hat{b}}\right), \\ f_{\hat{B}_1, \hat{B}_1}^{(0)}(\tilde{b}_1, \hat{b}_1) &= \delta(\tilde{b}_1 - 1/2) \delta(\hat{b}_1 - 1/2), \\ f_C^{(0)}(\hat{c}) &= \tilde{\eta} \delta(\hat{c} + \log(1 - \tilde{\eta})/\tilde{\eta}) \\ &\quad + (1 - \tilde{\eta}) \delta(\hat{c} - \log(1 - \tilde{\eta})/\tilde{\eta}), \\ f_P^{(0)} &= f_C^{(0)}. \end{aligned}$$

2) 変数ノードの密度関数 $f_P^{(j)}$ を用いてパリティチェックノードの密度関数 $f_Q^{(j)}$ を求める [1]。ここで確率密度関数 $f_P^{(j)}$ に従う $d_c - 1$ 個の確率変数を $P_1, P_2, \dots, P_{d_c - 1}$ としたとき、パリティチェックの確率変数 Q が次式を満足するような Q の確率密度関数が $f_Q^{(j)}$ である。

$$\tanh(Q/2) = \prod_{i=1}^{d_c - 1} \tanh(P_i/2). \quad (26)$$

3) パリティチェックノードの密度関数 $f_Q^{(j)}$ を用いて、通信路のファクターノードへの出力 D の密度関数 $f_D^{(j)}$ を次式で求める。

$$f_D^{(j)} = \mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}(f_Q^{(j)})^{d_v})]. \quad (27)$$

4) 式 (9) を用いて、 $f_D^{(j)}, f_{\hat{A}_1, \hat{A}_1}^{(j)}$ から $f_{\hat{A}_1, \hat{A}_1}^{(j+1)}$ を計算する。同様に $f_D^{(j)}, f_{\hat{B}_1, \hat{B}_1}^{(j)}$ から $f_{\hat{B}_1, \hat{B}_1}^{(j+1)}$ を計算する。

式 (24) を用いて、 $f_{\hat{A}_1, \hat{A}_1}^{(j)}, f_{\hat{B}_1, \hat{B}_1}^{(j)}$ から $f_C^{(j+1)}$ を計算する。

5) $f_C^{(j+1)}$ と $f_Q^{(j)}$ を用いて、変数ノードの確率密度関数を次式で更新する。

$$f_P^{(j+1)} = \mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}(f_C^{(j+1)})\mathcal{F}(f_Q^{(j)})^{d_v})]. \quad (28)$$

6) $j \geq l_{\max}$ か次式が成り立つ場合に終了する。

$$P_{\text{err}}(j) = \int_{-\infty}^0 \mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}(f_P^{(j+1)})\mathcal{F}(f_Q^{(j)}))](x) dx < \epsilon. \quad (29)$$

そうでなければ $j := j + 1$ とし、ステップ 2) へ。□

4 従来法との関連及び提案手法の計算量

4.1 従来法との関連

文献 [6] では真のパラメータが既知であることを前提として、そのパラメータを用いて復号を行ったときに復号誤り確率が漸的に 0 かどうかを判断するアルゴリズムである。また前節で提案したアルゴリズムは、復号

パラメータが真のパラメータと異なっている場合に用いることができ、その場合に復号誤り確率が漸的に 0 かどうかを判断するアルゴリズムである。従って、提案アルゴリズムにおいて復号パラメータと真のパラメータを同じに設定した場合には文献 [6] の結果とまったく一致する。

具体的に式で考えると、 $\hat{\theta} = \tilde{\theta}$ としたとき、次式が成り立つ。

$$f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1) = \begin{cases} f(\tilde{a}_1) = \int_{\hat{a}_1} f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1) d\hat{a}_1, & \tilde{a}_1 = \hat{a}_1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (30)$$

なぜならば、復号時に $\tilde{a}_1 = \hat{a}_1$ となる確率が 1 だからである。上の式を用いると、文献 [6] の結果と一致する。

以上より、本提案手法は文献 [6] の手法含んだ拡張と考えることができる。ただし次節で詳しく述べるが、提案手法では同時確率密度関数 $f(\tilde{A}_1, \hat{A}_1)$ を更新しなければならないため、解析に必要となる計算量は従来よりも大幅に増えてしまう欠点があることにも注意すべきである。

4.2 密度発展法の計算量

本節では提案した密度発展法に必要な計算量について議論する。密度発展法ではフーリエ変換や積分計算が必要なため、連続な確率変数に対しては離散化を行って離散フーリエ変換や数値積分に置き換え、近似的な密度関数を更新していく。そこで、ここでは密度発展法における 1 回の繰り返しに必要な計算量を、量子化した点の数のオーダーで示す。

まず 3.4 節で示した密度発展法のアルゴリズムにおいて、ステップ (2),(3),(5) について考える。これらはマルコフ過程ではない通常の独立な通信路の密度発展法とほぼ同じ計算であり、確率変数 \hat{C}, P, Q, D が同じ量子化数 n_P であったと仮定すると、各ステップに必要な計算量は $O(n_P \log n_P)$ である。これはフーリエ変換・逆変換に必要な計算量が大半を占めることを意味する。

次にアルゴリズムにおける (4) の計算量を求める。 \tilde{a}_1, \hat{a}_1 及び \tilde{b}_1, \hat{b}_1 の量子化数を n_A と表すと、式 (12) の分布を全て求めるために必要な計算量は $O(n_A^2)$ であり、式 (9) の分布全てを求めるために必要な計算量は $O(n_A^2 n_P)$ である。これは $f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1)$ が n_A^2 通り存在し、変数 d に対する積分計算にそれぞれ $O(n_P)$ の計算量が必要となるからである。

次に式 (24) の分布を全て計算するために必要な計算量について考える。まず全ての \hat{a}_1 及び \hat{b}_1 に対して

$$\begin{aligned} f(\hat{a}_1 | s) &= \int_{\tilde{a}_1} f(\tilde{a}_1, \hat{a}_1 | s) d\tilde{a}_1, \\ f(\hat{b}_1 | s) &= \int_{\tilde{b}_1} f(\tilde{b}_1, \hat{b}_1 | s) d\tilde{b}_1, \end{aligned} \quad (31)$$

を求めるために $O(n_A^2)$ 必要となる。これらを一度求め

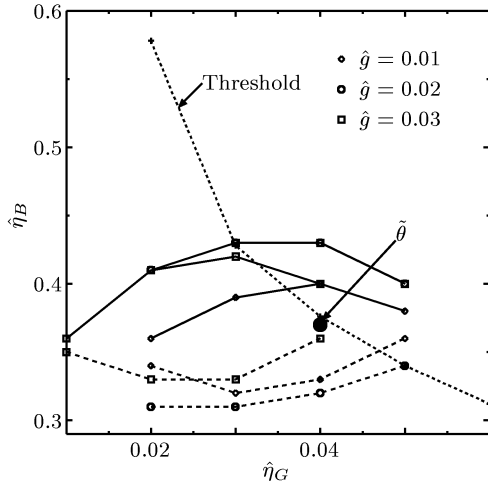


図 1: (3,4) 正則 LDPC 符号に対して $\tilde{\theta} = (\tilde{g} = 0.02, \tilde{b} = 0.02, \tilde{\eta}_G = 0.04, \tilde{\eta}_B = 0.37)$ としたとき、復号誤り確率が 0 となる $\hat{\theta}$ の範囲。ただし $\hat{g} = \hat{b}$ とする。実線は $\hat{\eta}_B$ の上限を表し、ダッシュ線は $\hat{\eta}_B$ の下限を表す。

てから式 (24) を計算すると、 \hat{b}_1 に関する積分を全ての \hat{c} に対して行うため、計算量は $O(n_A n_P)$ となる。

以上から、最も多くを占める計算は $f(\hat{a}_1, \hat{a}_1)$ 及び $f(\hat{b}_1, \hat{b}_1)$ の更新に必要となる計算量 $O(n_A^2 n_P)$ であることが分かる。

文献 [6] の手法に対して同じ議論を行うと、 $O(n_A n_P)$ となるため、単純にオーダーで比較すると約 n_A 倍の計算が必要になることが分かる。

なお、必要となるメモリ量は $O(n_A^2)$ あるいは $O(n_P)$ 程度で済む。

5 ロバスト性の考察

本節では、先に提案した密度発展法を用いて真のパラメータ及び復号パラメータを様々に設定し、漸近的に復号誤り確率が 0 になるパラメータの組を調べた結果を示す。ここでは (3,4) 正則 LDPC 符号を用い、 $l_{\max} = 1000$ 、 $\epsilon = 1.0^{-10}$ と設定して解析を行った。

まずは真のパラメータを固定したもとの、復号誤り確率が 0 となる復号パラメータの範囲を調べる。図 1 に、 $\tilde{\theta} = (\tilde{g} = 0.02, \tilde{b} = 0.02, \tilde{\eta}_G = 0.04, \tilde{\eta}_B = 0.37)$ と設定したときの結果を示す。なお、参考のために真のパラメータを復号パラメータと設定したときに、復号誤り確率が 0 となるパラメータのしきい値も点線で示している。

復号パラメータはまず $\hat{g} = \hat{b}$ と設定し、 $\hat{\eta}_G$ を 0.01 刻みに固定し、それぞれに対して $\hat{\eta}_B$ を 0.01 刻みに動かして解析したときに復号誤り確率が 0 になる $\hat{\eta}_B$ の上限と下限を示している。従って、この上限と下限の間にあるパラメータを用いた場合は、復号誤り確率が 0 となることを意味する。

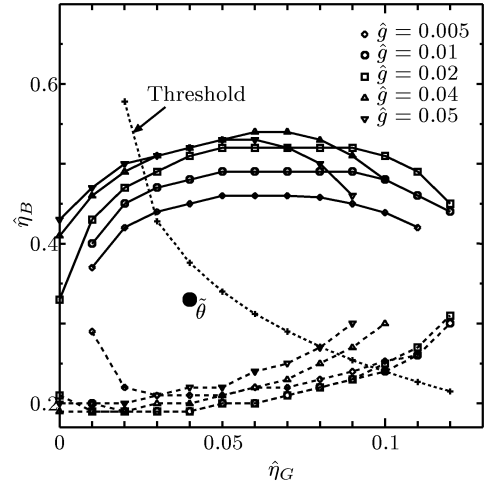


図 2: (3,4) 正則 LDPC 符号に対して $\tilde{\theta} = (\tilde{g} = 0.02, \tilde{b} = 0.02, \tilde{\eta}_G = 0.04, \tilde{\eta}_B = 0.33)$ としたとき、復号誤り確率が 0 となる $\hat{\theta}$ の範囲。ただし $\hat{g} = \hat{b}$ とする。実線は $\hat{\eta}_B$ の上限を表し、ダッシュ線は $\hat{\eta}_B$ の下限を表す。

図 1 は、 $\tilde{\theta}$ がしきい値に近いにもかかわらず、ある程度の範囲で復号パラメータが真のパラメータとずれても構わないことを示している。

この結果を踏まえ、真のパラメータを少ししきい値から離れた場合の結果を図 2 に示す。 $\tilde{\theta} = (\tilde{g} = 0.02, \tilde{b} = 0.02, \tilde{\eta}_G = 0.04, \tilde{\eta}_B = 0.33)$ とし、 $\hat{g} = \hat{b}$ の範囲も少し広げて解析を行っている。

図 2 を見ると、図 1 よりも復号誤り確率が 0 となる復号パラメータの範囲が明らかに広がっており、かなり広範な範囲において最適な復号と等価となることが見て取れる。従って真のパラメータがしきい値から少し離れていれば、復号パラメータの多少のずれは復号性能に大きな影響を与えないことが分かる。この結果は真のパラメータの推定を行う方法やその頻度、また復号器の簡略化などにも役立てることができる。

次に復号パラメータを固定したときに、復号誤り確率が 0 となる真のパラメータの範囲を調べる。復号パラメータは、図 1,2 の中で、全てのケースで誤り確率が 0 になる復号パラメータとして $\hat{\theta} = (\hat{g} = 0.02, \hat{b} = 0.02, \hat{\eta}_G = 0.025, \hat{\eta}_B = 0.36)$ を選択した。このときの結果を図 3 に示す。

図 3 を見ると真のパラメータの範囲は、場所によってしきい値にかなり近い箇所もある。また見て分かる通り、かなり広範な範囲で復号誤り確率が 0 となることが分かる。さらに、予想では致命的とも思われる $\tilde{g} \neq \hat{g}$ に対しても、かなり追従していることが見て取れる。

以上の結果から、GE-LDPC 復号はかなりのロバスト性を有しており、これらの解析結果を積極的に利用した復号パラメータの設定法や、LDPC 符号の設計方法を考

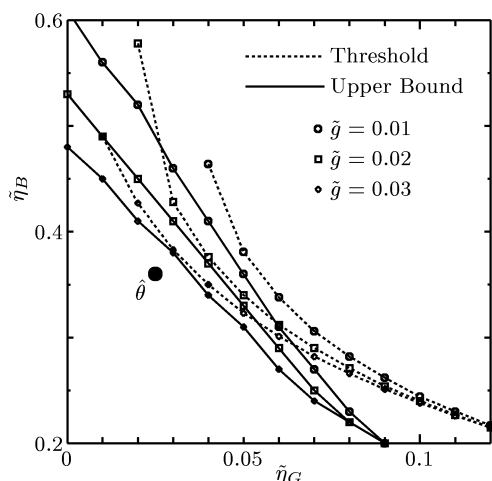


図 3: (3,4) 正則 LDPC 符号に対して $\hat{\theta} = (\hat{g} = 0.02, \hat{b} = 0.02, \hat{\eta}_G = 0.025, \hat{\eta}_B = 0.36)$ としたとき、復号誤り確率が 0 となる $\hat{\theta}$ の範囲。ただし $\tilde{g} = \tilde{b}$ とする。実線は $\hat{\eta}_B$ の上限を表す。

えることができると思われる。

6 むすび

本稿では、Gilbert-Elliott 通信路に対する LDPC 符号のロバスト性について解析を行った。そのために GE-LDPC 復号の前進状態確率に対して、真のパラメータと復号パラメータそれぞれに対する同時確率密度関数 $f(\hat{a}_1, \hat{a}_1)$ を更新することにより、真のパラメータと、復号時のパラメータが異なる場合にも解析可能な密度発展法を提案した。

またいくつかの例に対して、本手法を用いて復号誤り確率が漸的に 0 になる真のパラメータと復号パラメータのペアの範囲を求めた。その結果、GE-LDPC 復号はかなりのロバスト性を有しており、また真のパラメータが極端にしきい値に近くない場合には、多少復号パラメータが真の値と異なっても、漸的にかなり良好な性能となることが示された。

本手法は同時確率密度関数を密度発展法で更新するため、非常に大きな計算量が必要となる。今後は、ガウス近似手法や EXIT チャートなどの手法を用いて計算量を削減することが考えられる。その上で、より一般の隠れマルコフ雑音通信路に対して解析を行う手法を開発する必要がある。さらには、ロバスト性を積極的に利用した復号や符号の設計なども今後の課題である。

参考文献

- [1] T.J.Richardson, R.L.Urbanke, "The Capacity of Low-Density Parity-Check Codes Under Message-Passing Decoding," *Information Theory*, IEEE Transactions on vol. 47, no.2, pp.599 - 618, Feb. 2001.
- [2] S. Y. Chung, G. D. Forney, Jr., T. J. Richardson and R. Urbanke, "On the Design of Low-Density Parity-Check Codes within 0.0045dB of the Shannon Limit," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 5, pp.58-60, Feb. 2001.
- [3] T.Wadayama, "An Iterative Decoding Algorithm of Low Density Parity Check Codes for Hidden Markov Noise Channels," *International Conference on Information Theory and Its Applications*, Hawaii, 2000.
- [4] J. Garcia-Frias, "Decoding of low-density parity-check codes over finite-state binary Markov channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol 52, no11, pp.1840-1843, Nov. 2004.
- [5] 加行幸人, 荻原春生, "バースト雑音通信路における LDPC 符号の復号," 第 28 回情報理論とその応用学会論文集, pp.239-242, Nov. 2005.
- [6] A.W.Eckford, F.R.Kschischang and S.Pasupathy, "Analysis of Low-Density Parity-Check Codes for the Gilbert-Elliott Channel," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 51, no.11, pp.3872-3889, Nov. 2005.
- [7] A.W.Eckford, F.R.Kschischang and S.Pasupathy, "On Designing Good LDPC Codes for Markov Channels," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol.53, no.1, pp5-21, Jan. 2007.
- [8] A.W.Eckford, F.R.Kschischang and S.Pasupathy, "A Partial Ordering of General Finite-State Markov Channels Under LDPC Decoding," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol.53, no.6, pp2072-2087, June 2007.
- [9] G.L.Jossy Sayir and I.Land, "Optimization of LDPC Codes for Receiver Frontends," *IEEE International Symposium on Information Theory*, Seattle, USA, pp.2388-2392, 2006.
- [10] C.R.Jones, T.Tian, J.Villasenor and R.D.Wesel, "The Universal Operation of LDPC Codes Over Scalar Fading Channels," *IEEE Trans. on Commun.* vol.55, no.1, pp.122-132, Jan. 2007.

- [1] T.J.Richardson, R.L.Urbanke, "The Capacity of Low-Density Parity-Check Codes Under Message-Passing Decoding," *Information Theory*, IEEE