The 30th Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2007)
Kashikojima, Mie, Japan, Nov. 27–30, 2007

# Viterbiアルゴリズムにおける尤度比検定を用いたリスト復号が保持すべきサバイバの本数について

# Restrictions for number of retained paths for variable size list decoding with the Viterbi algorithm and likelihood ratio testing

新家 稔央* 桑子 雅史 * 松嶋 敏泰† 平澤 茂一 †
Toshihiro Niinomi Masashi Kuwako Toshiyasu Matsushima Shigeichi Hirasawa

Abstract— The decision criterion called“ LR ”is known to be very suitable for the Viterbi algorithm (VA), because little effort of calculation is needed for LR. This criterion was once used in ARQ using the VA, proposed by Yamamoto and Itoh. Then, variable size list decoding (VLD) was proposed by authors. In this paper, the restrictions for number of retained paths for variable size list decoding with VA is clarified by random coding arguments.

Keywords— List decoding , Viterbi algorithm, random coding, error exponent, decision criterion

## 1 はじめに

リストサイズを確率変数にとるリスト復号 (Variable size list decoding : VLD) は，Forney [4] により，ブロック符号を対象にはじめて提案された．そして，同時に，その誤り指数の下界が求められた．一方，畳込み符号における VLD の誤り指数の下界は，筆者らの論文 [13] で導出された．[13] では，Viterbi アルゴリズム (VA) と整合がよいと知られる判定基準 LR を用いて，畳込み符号における VLD の誤り指数を導出している．

[13] のアルゴリズムは，VA をベースとしている．しかし，サバイバの本数を確率変数にとるため，その本数が無限に必要になることを許すのであれば，もはや畳込み符号の復号法として破綻することを意味する．しかし，幸いなことに，このアルゴリズムでは，拘束長 $K$ に応じ,「保持すべきサバイバ本数の上限」を設けることができることを本論文では明らかにする．[13] では，拘束長 $K$ を大きくしていけば，リスト復号誤り確率を任意に小さくできることが示されていたが，保持すべきサバイバの本数に対する制約は何も加えていなかった．そこで，本論文では，各ノードで生成されるリストのサイズに適切な上限を与えたとしても，リスト復号誤り確率に劣化を与えないことを示す.

なお, 本稿では，通信路容量 $C$ の離散的無記憶通信路を仮定する．

* 武蔵工業大学知識工学部情報科学科 Dept of computer science, Faculty of knowledge engineering, Musashi institute of technology
† 早稲田大学理工学部経営システム工学科 Dept of IE and management systems, School of science and engineering, Waseda university

## 2 準備

本論文では，以下の表記を用いることにする．

### 2.1 離散的無記憶通信路 (DMCs)

入力アルファベット $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, a-1\}$, 出力アルファベット $\mathcal{B} = \{0, 1, \cdots, b-1\}$ の離散的無記憶通信路を仮定し，その通信路行列 $P = \{P_{ji}, i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{B}\}$ を仮定する．

### 2.2 畳込み符号について

送信される情報記号系列（メッセージ）を $\mathsf{u}^N$ で表す． ただし，$\mathsf{u}^N$ は, 符号器へ入力される $q$ 元アルファベット $\mathcal{U} = \{0, 1, \cdots, q-1\}$ からなる長さ $N$ の系列である． よって, ある情報記号系列 $\mathsf{u}_i^N$ は, $\mathsf{u}_i^N = u_{i,1}u_{i,2}\cdots u_{i,t}\cdots u_{i,N}$ (ただし, $u_{i,t} \in \mathcal{U}$, $t = 1, 2, \cdots, N$ であり， $i = 1, 2, \cdots, q^N$ ) で示される．ブランチ拘束長 $K$ の畳込み符号は $q$ 進木で示すことができ, ある情報記号系列はルートから伸びる 1 本のパスに対応する．すなわち, $\mathsf{u}_i^N$ の第 $t$ ブランチに対する符号系列は, $u_{i,t}$ の符号器への入力，および, $u_{i,t-1}, u_{i,t-2}, \cdots, u_{i,t-K}$ で定まる符号器の状態によって定まる．また，符号化に用いる 1 ブランチあたりの通信路の入力アルファベットの数を $v$ とすると, レート $R$ は $R = \frac{1}{v}\ln q$ と定義できる．

なお, パス $\mathsf{u}_i^N$ の第 1 ブランチから第 $n$ ブランチまでの部分系列を $\mathsf{u}_i^n$ で記す．さらに, 第 1 ブランチから第 $n$ ブランチまでのパス $\mathsf{u}_i^n$ に対する符号系列および受信系列を, それぞれ, $\mathsf{x}_i^{vn}$ および $\mathsf{y}^{vn}$ と表し, その第 $t$ ブランチに対する符号系列および受信系列を, それぞれ, $\mathsf{x}_{i,t}^v$ および $\mathsf{y}_t^v$ で記すことにする．

## 3 ベースとなる VLD のアルゴリズム

以下では，$q^{K-1}$ 個のノードごとに複数本のサバイバを残していくが，勝ち残ったサバイバの集合をリストと呼ぶ．VLD を行う [12] のアルゴリズムでは，リストのサイズは固定でなく，したがって，各ノードに残すサバイバの本数に上限は無かった．

### 3.1 VA を用いた VLD のアルゴリズム

以下に [12] のアルゴリズムを示す．

レベル $K-1$ まで, すべてのパスを伸長する．レベル $K$ より，$K \leq n \leq N+K-1$ であるレベル $n$ において, 以下の手続き（1）〜（3）を繰り返す.

（1）初期条件

レベル $n-1$ において, $q^{K-1}$ 個の状態ごとに，すべてのパスを保持し，これをリストの初期条件とする．リストの要素は長さ $n-1$ ブランチのパスである.

（2）パス伸長

$q^{K-1}$ 個のリストの各々のサバイバに対して，1ブランチの伸長を行なう．すなわち, 情報記号列 $\mathsf{u}^{n-1}$ に対応するパスがサバイバとして残っているとしたとき, $q$ 本のパスを伸長し, $\mathsf{u}^{n} = \mathsf{u}^{n-1}u$ ,　$u \in \mathcal{U}$ に対するパスの尤度を計算する.

（3）VLD によるパス選択

レベル $n$ の $q^{K-1}$ の各々のノードに合流するパスの中で $k$ 番めに尤度の大きいパスを $\mathsf{u}^{n}_{(k)}$ [1] で表す．合流するすべてのパスに対して, 以下の判定基準により，サバイバを決定する．すなわち，$m$ をこのノードに合流するパスとしたとき,

$$\frac{Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}^{vn}_{m})}{Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}^{vn}_{(1)})} \geq \Delta, \quad \Delta < 1 \qquad (1)$$

であれば, サバイバとする．そうでなければ, 捨てる．合流するすべてのパスに対して，(1) を繰返して選ばれたサバイバの集合を，このノードのリストとする.

（アルゴリズム終了）

### 3.2 サバイバの最大の本数に制約を加えないアルゴリズムに対する評価

以上に示した最大の本数に制限を加えないアルゴリズムに対する評価を，補題 1 から補題 3 に示す [13]．なお, $\mathsf{q} = \{q_0, q_1, \cdots, q_{a-1}\}$ を通信路シンボルの入力確率分布とする.

[補題 1] ランダム符号化を用いることで, $\Pr(E_1)$ のアンサンブルに対する平均誤り確率 $\mathcal{E}\Pr(E_1)$ が次式で上界される.

$$\mathcal{E}\Pr(E_1) \leq \frac{Ne^{vR\rho_1}}{1-e^{-v\epsilon_1}} \cdot \exp\{-Kv\,[\,E_1(R,\Delta)\,]\ \},$$

$$E_1(R,\Delta) = \max_{\mathcal{D}_1}\left[E_o(\sigma_1,\rho_1,\mathsf{q}) - \sigma_1\frac{\ln\Delta}{Kv}\right]$$

$$\mathcal{D}_1 = \{\mathsf{q},\ \ 0 \leq \rho_1 \leq 1,\ \ \sigma_1 \geq 0,$$
$$\epsilon_1 = E_o(\sigma_1,\rho_1) - \rho_1 R > 0.\}$$

$$E_o(\sigma,\rho,\mathsf{q})$$
$$= -\ln\left[\sum_j\left(\sum_i q_i P_{ji}^{1-\sigma}\right)\left(\sum_i q_i P_{ji}^{\sigma/\rho}\right)^{\rho}\right]$$

[補題 2] ランダム符号化を用いることで,$E[S_{\ell ist}]$ のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}E[S_{\ell ist}]$ が次式で上界される.

$$\mathcal{E}E[S_{\ell ist}] \leq \frac{Ne^{vR}}{1-e^{-v\epsilon_2}} \cdot \exp\{-Kv\,[\ E_2(R,\Delta)\ ]\ \ \}$$

$$E_2(R,\Delta) = \max_{\mathcal{D}_2}\left[E_o(\sigma_2,1,\mathsf{q}) + \sigma_2\frac{\ln\Delta}{Kv}\right]$$

$$\mathcal{D}_2 = \{\ \ \mathsf{q},\ \ \sigma_2 \geq 0,$$
$$\epsilon_2 = E_o(\sigma_2,1) - R > 0.\}$$

## 4 保持できるサバイバの本数に制約を設けた VLD と保持すべきサバイバの本数

前節で示したアルゴリズムの（1）〜（3）に加えて, 次の（4）を追加し，保持するパスの本数に制限を加えたアルゴリズムにする.

（4）サバイバの本数の制限

ノードあたりのサバイバの本数が，$e^{K\omega}+1$ 本を越えたら，ランダムにまびいて $e^{K\omega}+1$ 本のサバイバを残す.

すると，リストに含まれるパスの本数がある値を越えたとき，(4) の手続きで正しいパスが捨てられてしまう場合が生じる．しかし，リストに含まれるパスの本数がある値より大きくなる確率が復号誤り確率に対して，十分小さく抑えられれば，サバイバが保持すべき誤りパスの本数を有限におさえてもかまわない.

そこで，誤り指数を劣化させない意味で，このことを満たすような $\omega$ の値を明らかにし，ノードあたりで保持するサバイバの本数の上限を設けてもアルゴリズムを劣化させないことを明らかにしたい.

### 4.1 正しいパスが合流するノードに $e^{Kw}$ 本以上のパスがリストとして残る確率

正しいパス $\mathsf{u}_0^N$ に対するレベル $n$ までの符号系列 $\mathsf{x}_0^{vn}$ とし，レベル $n$ で合流する誤りパスの集合を $A$ とする．このとき，誤りパス $i \in A$ がリストに含まれるときに 1, そうでないときに 0 になるようなインジケータ $\varphi(\mathsf{y}^{vn}, i)$ を導入する．すると,

$$\varphi(\mathsf{y}^{vn}, i) = \begin{cases} 1: & \frac{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_0^{vn})} \geq \Delta \\ 0: & \text{それ以外.} \end{cases}$$

である.

次に，レベル $n$ のノードでリストに残るパスが $e^{Kv\omega}$ 本を越える確率 $P_{over,n}(\mathsf{u}_0^N)$ の上界を求めよう．誤りパス $i \in A$ がリストに含まれるとき，$\varphi(\mathsf{y}^{vn}, i) = 1$ であるから,

$$P_{over,n}(\mathsf{u}_0^N)$$

[1] 本稿では，レベル n のノードにおいて, 情報記号列 $\mathbf{u}_k{}^N$ に対する尤度を $\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_k^{vn})$ と表すのに対し, 尤度が k 番目に大きいパスの尤度を $\Pr(\mathbf{y}^{vn}|\mathbf{x}_{(k)}^{vn})$ と使い分ける. すなわち, $(\cdot)$ はあるノードでのパスの尤度に対する順位を表す添字である.

$$= \Pr\left[i \in A \text{ のパスでリストに含まれる本数} \geq e^{Kv\omega}\right]$$

$$\leq \Pr\left[\sum_{i\in A}\varphi(\mathsf{y}^{vn}, i) \geq e^{Kv\omega}\right]. \qquad (2)$$

ここで，$\varphi(\mathsf{y}^{vn}, i)$ に対しチャーノフ上界を用いると，

$$\varphi(\mathsf{y}^{vn}, i) \leq \left(\frac{\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_0^{vn})}\Delta^{-1}\right)^{\alpha}, \quad \alpha \geq 0$$

が成り立つ．よって，式 (2) は，

$$\leq \Pr\left[\sum_{i\in A}\left(\frac{\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_0^{vn})}\Delta^{-1}\right)^{\alpha} \geq e^{Kv\omega}\right] \qquad (3)$$

で押えられる．さらに，次のインジケータ $\phi(\mathsf{y}^{vn})$ を考える．

$$\phi(\mathsf{y}^{vn}) = \begin{cases} 1: & \sum_{i\in A}\left(\frac{\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_0^{vn})}\Delta^{-1}\right)^{\alpha} \geq e^{Kv\omega} \\ 0: & \text{それ以外.} \end{cases}$$

すると，

$$P_{over,n}(\mathsf{u}_0^N) \leq \sum_{\mathsf{y}^{vn}} \Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_0^{vn})\phi(\mathsf{y}^{vn}) \qquad (4)$$

であるから，再度，インジケータをチャーノフ上界で押えることで次式が得られる．

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\mathsf{y}^{vn}} \Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_0^{vn}) \\ &\cdot \left[\sum_{i\in A}\left(\frac{\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_i^{vn})}{\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_0^{vn})}\Delta^{-1}\right)^{\sigma/\rho} e^{-Kv\omega}\right]^{\rho} \\ &= e^{-Kv\left[\rho\omega+\sigma\frac{\ln\Delta}{Kv}\right]} \\ &\cdot \sum_{\mathsf{y}^{vn}} \Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_0^{vn})^{1-\sigma}\left[\sum_{i\in A}\Pr(\mathsf{y}^{vn}|\mathsf{x}_0^{vn})^{\sigma/\rho}\right]^{\rho} \end{aligned} \qquad (5)$$

ただし，$\alpha = \sigma/\rho$，$\sigma \geq 0$，$\rho \geq 0$ とおいた．ここで，$0 \leq \rho \leq 1$ と制約をつけ，式 (5) にランダム符号化を施すと，次の補題が成り立つ[2]．

[補題 3] ランダム符号化を用いることで，正しいパスが合流するノードに $e^{Kw}$ 本以上のパスが残る確率のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}P_{over,n}$ が次式で上界される．

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}P_{over,n} \leq \frac{e^{vR\rho}}{1-e^{-v\epsilon}}\exp\left\{-Kv\left[E_{over}(R,\Delta,\omega)\right]\right\} \\ &E_{over}(R,\Delta,\omega) = \max_{\mathcal{D}}\left[E_o(\sigma,\rho)+\sigma\frac{\ln\Delta}{Kv}+\rho\omega\right] \\ &\mathcal{D} = \{\mathsf{q}, \sigma \geq 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \\ &\qquad E_o(\sigma,\rho) - \rho R > 0.\} \end{aligned} \qquad (6)$$

したがって，$E_{over}(R,\Delta,\omega)$ の値が大きければ，ノードに残るサバイバの本数が $e^{Kv\omega}$ を越える確率は小さくなる．また，$\omega$ の値が大きければ，$E_{over}(R,\Delta,\omega)$ の値が大きくなる．さらに，リスト復号であるから $\Delta < 1$ であり，$\ln\Delta$ が負の値であることに注意すると，$\Delta$ の値が小さいほど $E_{over}(R,\Delta,\omega)$ の値は小さくなる．

### 4.2 保持すべきリストサイズ $e^{Kvw}$

前節のアルゴリズムの (4) の手続きでは,「リストサイズに制限を加えたアルゴリズム」を示した．この手続きを加えることにより，正しいパスが捨てられる事象が生じる．しかし，この事象は，リストに残るパスの本数がその制限 $e^{Kvw}$ を越えないと生じないので，リストに残るパスの本数が $e^{Kvw}$ を越える確率で上界ができる．そこで,「リストサイズに制限を加えないアルゴリズム」と,「制限を加えたアルゴリズム」で，同等の復号誤り確率を達成できるためには，式 (2) 式の右辺と式 (6) 式の指数部が同等になるように $w$ を決めてやればよい．したがって，両者を比較すると，

$$E_{over}(R,\Delta,\omega) \ \geq \ E_1(R,\Delta) \qquad (7)$$

であることが必要である．この条件を満たしていれば，誤り指数は依然として，(2) 式の指数部となり，リストサイズに制限を加えても，リスト復号誤り確率に影響を及ぼさない．

以上は，正しいパスが合流するノードにおける議論である．しかし，復号のアルゴリズムにおいては，正しいパスがどのノードにあるかは知り得ない．したがって，$q^{K-1}$ のノードすべてにおいて保持すべきサバイバの本数の上限が $e^{Kvw}$ 本となる．また，正しいパスが合流しないノードにおいては，残すサバイバの本数に制限をおいても，復号誤り確率を増加させることはない．したがって，次の定理を得る．

[定理 1] 手続き (4) において，各ノードあたりのサバイバの本数の制限 $e^{Kv\omega}$ に対し，

$$E_{over}(R,\Delta,\omega) \ \geq \ E_1(R,\Delta) \qquad (8)$$

を満たすように $w$ を定める．すると，この手続きを加えても，誤り指数を劣化させない意味でリスト復号誤りの確率に影響を及ぼさない．

## 5 強雑音通信路における数値例

一般の通信路で，式 (8) の条件を陽に求めることは難しいと思われる．そこで，以下では，強雑音通信路 (Very Noisey Channel:VNC) を仮定して，数値例を与える．

VLD では，しきい値の大小に対し，正しいパスをリストから外してしまう確率と多くの正しくないパスをリストに含めてしまう確率にはトレードオフの関係がある．

[2] 式 (5) の第 2 項にランダム符号化を施す手法は，[3][12] と全く同様である．

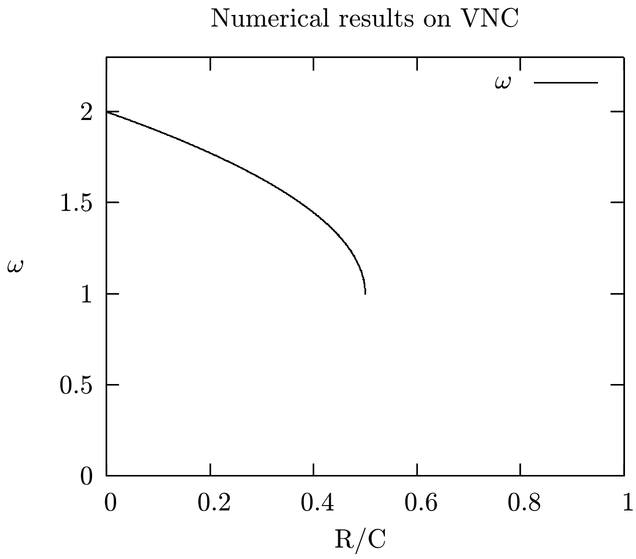


図 1: $e_{v\ell d}(R)$ を達成するために必要な $\omega$ の値

もし，しきい値を無造作に小さくとってしまえば，正しいパスはリストから漏れにくいかもしれないが，リストに残る誤りパスの平均本数は莫大な数となる．そこでここでは，[4] に従い，リストに残る誤りパスの平均本数 $E[S_{\ell ist}]$ を拘束長 $K$ が増えるとともに任意に小さくできることを条件に最も小さいしきい値を設定し，リスト復号誤り確率に対する誤り指数が最も大きい値 $e_{v\ell d}(R)$ となる場合の例を与えよう．VNC では，

$$
\begin{aligned}
E_o(\sigma,\rho) &= \sigma\left\{2-\sigma\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\right\}C \\
e_{vld}(R) &= \max_{\mathcal{D}}\left[E_o(\sigma,\rho)+\sigma\cdot\theta(R)\right] \\
\theta(R) &= \frac{2R}{C-\sqrt{C(C-2R)}}C, \\
0 \le R &< \frac{C}{2} = R_{comp}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これらより $\omega$ の数値計算結果を求めると図 1 のようになる．この結果を文献 [13] における $e_{v\ell d}(R)$ のグラフと比較してみる．すると，レートが 0 に近く $e_{v\ell d}(R)$ が大きな値を得ているときには $\omega$ の値も大きな値が必要となる．この領域からレートを増加させると $e_{v\ell d}(R)$ の値は減少するが，$\omega$ の値もともに減少することがわかる．

## 6　まとめ

畳込み符号におけるリストサイズが確率変数であるリスト復号器においては，リストサイズの大きさに制限は設けていなかった．本論文では，このアルゴリズムが持つ復号誤り確率に応じて，一定数以上のリストサイズ，すなわち一定以上の本数のサバイバを保持すれば十分であることを，ランダム符号化を用いて明らかにした．

## 参考文献


[1] T.Hashimoto, ”A list-type reduced-constraint generalization of the Viterbi algorithm”, IEEE Trans. Inf.Theory vol.IT-33, no.6, pp.866-876, Nov.1987.

[2] H.Yamamoto and K.Itoh, ” Vitebi decoding algorithm for convolutional codes with repeat request” IEEE Trans. Inf.Theory vol.IT-26, no.5, pp540-547, Sep.1980.

[3] T.Hashimoto, ”On the error exponent of convolutionaly coded ARQ”, IEEE Trans. Inf.Theory vol.IT-40, no.2, pp.567-575, Mar.1994.

[4] G.D.Forney,Jr., ”Exponential error bounds for erasure,list and decision feedback schemes”, IEEE Trans.Inf.Theory vol.IT-14, no.2, pp.206-220, Mar.1968.

[5] G.D.Forney,Jr., ”Convolutional codes II : Maximum likelihood decoding”, Inf.Control. vol.25, no.3, pp.222-266, Jul.1974.

[6] A.J.Viterbi and J.K.Omura, ” Principles of communication and coding”, NY:McGraw-Hill, 1979.

[7] R.G.Gallager, “Imformation theory and reliable communication”, NY:Wiley, 1968.

[8] G.D.Forney,Jr., ”Concatenated codes”, MA:M.I.T., 1966.

[9] T.Hashimoto, “Composite scheme LR + Th for decoding with erasures and its effective equivalence to Forney’s rule”, IEEE Trans. Inf.Theory vol.45, no.1, pp.78-93, Jan.1999.

[10] 新家稔央, 松嶋敏泰, 平澤茂一, ”ゆう度比検定を用いた木符号の復号法について”, 信学論 (A), vol.J87-A, no.2, pp.224-233, 2004.

[11] 新家稔央, 松嶋敏泰, 平澤茂一, ”木符号におけるリスト復号法を用いた判定帰還方式について”, 信学論 (A), vol.83, no.1, pp.67-82, 2000.

[12] 新家稔央, 松嶋敏泰, 平澤茂一, ”Viterbi アルゴリズムを用いた可変サイズのリスト復号における誤り指数”, 第 27 回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp.815-818, 2004.

[13] 新家稔央, 松嶋敏泰, 平澤茂一, ”Viterbi アルゴリズムを用いた可変サイズのリスト復号における誤り指数”, 信学論 (A), Vol.J88-A No.11，pp.1343-1351, 2005.