8.1.1

The 31st Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2008)
Kinugawa, Tochigi, Japan, Oct. 7–10, 2008

ソリッドバースト消失の訂正に適した非正則 LDPC 符号の構成について
Construction of Irregular LDPC Codes for Correcting a Solid Burst Erasure

細谷 剛* 松嶋 敏泰† 平澤 茂一*
Gou Hosoya Toshiyasu Matsushima Shigeichi Hirasawa

Abstract— A structured irregular Low-Density Parity-Check (LDPC) code ensemble suitable for correcting a single solid burst erasure is presented. These code ensemble is the generalization of regular left and right LDPC (LR-LDPC) codes ensemble with three edge types and three disjoint sets of variable nodes. Average minimum span of stopping sets, which is a burst erasure correction measure under belief-propagation decoding for code ensemble, of the LR-LDPC code ensemble is larger than that of the standard LDPC codes ensemble when degrees of variable nodes take small. We formulate an lower bound of average minimum span of stopping sets for these code ensemble.

Keywords— low-density parity-check code, irregular LDPC code, solid burst erausre, stopping set, minimum span of stopping sets

1 はじめに

インターネットに代表されるパケット通信や無線通信などでは，送信した情報がまとまって消失するため，バースト消失訂正に適した符号を構成することは重要である [10], [9], [13]．符号化率 R の符号を用いた場合，消失通信路の通信路容量は $1-R$ であることが知られており [10]，密度発展法などを用いると，通信路容量に近い性能を達成する非正則 LDPC 符号の次数分布が得られる [2], [4]．LDPC 符号 [1] には多くの短いループが存在しているにもかかわらず，密度発展法ではループがないものと仮定している [4]．このようなループはエラーフロア現象の原因となる [6]．BP 復号法では，ストッピングセットとなるビット位置が消失すると訂正できないことが知られている [6]．ストッピングセットは簡単な条件で定義され，なおかつ複雑なループの構造を表現しており，ループを考慮した LDPC 符号の性能解析が可能となる [7], [8]．そのため，連続したビット位置にサイズの小さいストッピングセットが入らないようにすると，バースト消失訂正に適した LDPC 符号を構成することができる．

本研究では，確率伝播型 (BP) 復号法 [1], [2] を実行した下でソリッドバースト消失の訂正に適した非正則な低密度パリティ検査 (LDPC) 符号の構成法を提案する．著者らは，ソリッドバースト消失の訂正に適した正則 LDPC 符号 (正則 LR-LDPC 符号) の構成法 [13] を提案した．LR-LDPC 符号は，構造的に構成された LDPC 符号 [12] であり，複数の枝集合をもつグラフを組み合わせることによって訂正不可能なバースト消失長の最小値 (最小スパン長) [9] が大きくなるように構成される．本研究では，正則 LR-LDPC 符号の一般化を行い，非正則 LR-LDPC 符号の構成法を提案する．さらに提案する非正則 LR-LDPC 符号のアンサンブルに対し，平均的な最小スパン長の下界を [9], [13] を導出する方法を述べる．

2 準備

2.1 ノーテーション

$n \geq r \geq 0$ に対し，$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ とする．また多項式 $f(x)$ に対し，$\mathrm{coef}(f(x), x^i)$ を x^i の項の係数を表すものとする．

2.2 LDPC 符号アンサンブル

LDPC 符号は疎な検査行列によって定義される符号である．本研究では 2 元の符号を対象とし，また解析の際，検査行列をタナーグラフによって表現される非正則な LDPC 符号のアンサンブルを用いる．LDPC 符号のタナーグラフ G は $G = (V, \cup C, E)$, $V \cup C = \phi$, によって表される．ここで，$V = \{v_1, v_2, \dots, v_{|V|}\}$ と $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{|C|}\}$ は変数ノードと検査ノードの集合であり，それぞれ検査行列の列と行に対応し，$|V| = N$, $|C| = M$ である．また，E は枝の集合を表し，検査行列において要素が 1 の列と行に対応する変数ノードと検査ノードを枝で結ぶ．変数ノードと検査ノードにはソケットが付随し，ソケット同士を繋ぐことになる．各ノードのソケット数を次数と呼び，次式で与えられる次数分布

* 〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1, 早稲田大学理工学術院創造理工学部経営システム工学科, Department of Industrial and Management System Engineering, School of Creative Science and Engineering, Faculty of Science and Engineering, Waseda University. 3-4-1 Ohkubo Shinjyuku-ku, Tokyo 169-8555 Japan. E-mail: hosoya@m.ieice.org

† 〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1, 早稲田大学理工学術院基幹理工学部応用数理学科, Department of Applied Mathematics, School of Fundamental Science and Engineering, Faculty of Science and Engineering, Waseda University. 3-4-1 Ohkubo Shinjyuku-ku, Tokyo 169-8555 Japan.

多項式によって決定される[1].

$$\lambda(x)=\sum_{i=2}^{c_{\max}}\lambda_i x^{i-1},\quad \rho(x)=\sum_{i=3}^{d_{\max}}\rho_i x^{i-1}, \tag{1}$$

ここで λ_i と ρ_i は，グラフ中でそれぞれ次数 i の変数ノードと検査ノードに接続されている枝の比率であり，$c_{\max}$ ($d_{\max}$) は変数ノード (検査ノード) の最大次数である．また $\lambda_{c_{\max}}=1, \rho_{d_{\max}}=1$ の場合は，正則 LDPC 符号となる．$\tilde{\lambda}_i$ ($\tilde{\rho}_i$) は，次数 i の変数ノード (検査ノード) に接続されているノードの比率であり，次式によって得られる．また，変数ノードと検査ノードのノード次数分布は，それぞれ $\tilde{\lambda}(x)=\sum_{i=2}^{c_{\max}}\tilde{\lambda}_i x^i$ と $\tilde{\rho}(x)=\sum_{i=3}^{d_{\max}}\tilde{\rho}_i x^i$ と表される．変数ノードと検査ノードのそれぞれのソケットに対し，$\{1,2,\ldots,|E|\}$ の番号付けを行い，置換関数 $\pi:\{1,2,\ldots,|E|\}\to\{1,2,\ldots,|E|\}$ によってソケット間の枝の接続を決定する．このような接続方法の場合，同じノード間で 2 本以上の枝が接続される可能性があることに注意されたい．タナーグラフをもとにした LDPC 符号のアンサンブルは置換関数 π の場合の数だけ存在し，アンサンブルから選ばれる各符号 (グラフ G) は等確率で割り当てられる．符号長が N で，次数分布 $\lambda(x)$ と $\rho(x)$ をもつ LDPC 符号のアンサンブルを $(N,\lambda(x),\rho(x)$ LDPC 符号アンサンブルと呼ぶ．また，グラフ G の集合を $\mathcal{G}(N,\lambda(x),\rho(x)$ と表す．

$$\tilde{\lambda}_i=\frac{\lambda_i/i}{\int_0^1\lambda(x)dx},\quad \tilde{\rho}_i=\frac{\rho_i/i}{\int_0^1\rho(x)dx}, \tag{2}$$

変数ノードの数 N が与えられると，検査ノードの数 M と枝の総数 $|E|$ は次式によって得られる．

$$M=\frac{\int_0^1\rho(x)dx}{\int_0^1\lambda(x)dx}\times N,\quad |E|=\frac{N}{\int_0^1\lambda(x)dx}. \tag{3}$$

LDPC 符号の検査行列は必ずしもフルランクとは限らないため，符号化率 R は次式によって下限値 R' を得る．

$$R\geq R'=1-\frac{M}{N}=1-\frac{\int_0^1\rho(x)dx}{\int_0^1\lambda(x)dx}. \tag{4}$$

2.3 バースト消失と最小スパン長

ビット位置 $\mathcal{X}\subseteq[1,N]$ に対し，$V_{\mathcal{X}}$ をビット位置 $\mathcal{X}$ によって参照されたタナーグラフ中の変数ノードの部分集合とする．同様に $\mathcal{X}$ に対し，$V_{\mathcal{X}}$ をビット位置 $\mathcal{X}$ によって参照されたタナーグラフ中の枝の部分集合とする．$G_{\mathcal{X}}=(V_{\mathcal{X}}\cup T(V_{\mathcal{X}}),E_{\mathcal{X}})$ をビット位置 $\mathcal{X}$ で構成されるグラフ G の部分グラフとする．ここで，$T(V_{\mathcal{X}})$ は部分グラフ $G_{\mathcal{X}}$ において変数ノード集合 $V_{\mathcal{X}}$ に隣接する検査ノードの集合である．次の定義で与えられるストッピングセットは LDPC 符号に対し BP 復号法を実行したとき，重要な指標となる．

定義 1 ([6])**.** ビット位置の部分集合 $S\subseteq[1,N]$ に対し，部分グラフ $G_S=(V_S\cup T(V_S),E_S)$ における検査ノード $T(V_S)$ の全ての次数が 2 以上であるとき，S をストッピングセットと呼ぶ． □

文献 [6] の定義では，空集合もストッピングセットと定義されていたが，本研究では空集合はストッピングセットに含めないこととする．受信系列において消失したビット位置の集合を $\mathcal{E}$ とする．もし $S\subseteq\mathcal{E}$ である場合，ビット位置 $\mathcal{E}$ は BP 復号法では訂正できない．グラフ G における非空なストッピングセットの集合系を $\mathcal{S}(G)$ とする．あるストッピングセット $S\in\mathcal{S}(G)$ に対し，$|S|$ をストッピングセットのサイズと呼ぶ．

定義 2. $L\in[1,M+1]$ と $n\in[L,N]$ に対し，$S_{n,L}=\{n-L+1,n-L+2,\ldots,n\}$ を長さ L で右端のビット位置が n である連続したビット位置集合と定義する． □

定義 2 を用いてソリッドバースト消失を定義する．

定義 3. ある $L\in[1,M+1]$ と $n\in[L,N]$ に対し，ビット位置集合 $S_{n,L}$ における L のソリッドバースト消失が発生した場合，$\mathcal{E}=S_{n,L}$ である． □

定義 1 と 3 より，グラフ G における非空なストッピングセット $\mathcal{S}(G)$ が $S_{n,L}$ に存在する場合，$S_{n,L}$ に発生したバースト消失は BP 復号法では訂正できない．上記より，バースト消失における訂正指標を以下で定義する．

定義 4 ([9])**.** グラフ G に対し，ストッピングセットをもとにした最小スパン長 $\mu(G)$ は次式で与えられる．

$$\mu(G)=\min_{\substack{L\in[1,M+1],\ n\in[L,N]\\ S_{n,L}\supseteq\mathcal{X},\ \mathcal{X}\in\mathcal{S}(G)}}|S_{n,L}|. \tag{5}$$

□

2.4 LDPC 符号アンサンブルのストッピングセット分布

LDPC 符号アンサンブルのストッピングセット分布は，任意の大きさのストッピングセットをもつような部分グラフの数を数え上げることで求められる [7], [8].

補題 1. $(N,\lambda(x),\rho(x))$ LDPC 符号アンサンブルにおいて，サイズが w, $0<w<1-R$, のストッピングセット分布 $A(w)$ は次式によって求められる．

$$A(w)=\sum_{e=2w}^{c_{\max}w}\mathrm{coef}\Big[\prod_{j=2}^{c_{\max}}(1+yz^j)^{\tilde{\lambda}_jN},y^wz^e\Big]\times\frac{\mathrm{coef}\Big[\prod_{i=3}^{d_{\max}}\Big\{(1+x)^i-ix\Big\}^{\tilde{\rho}_iM},x^e\Big]}{\binom{|E|}{e}}. \tag{6}$$

□

[1] 検査ノードの最小次数については $i=1$ [3], [11] や $i=2$ [5], [7], [8] の場合があり，一概に決定されてはいないが，多くの文献では $i=2$ から定義されている．本研究で提案する非正則 LR-LDPC 符号では $i\geq3$ としないと，バースト消失に対する性能が悪くなるため，$i=3$ と定義する．

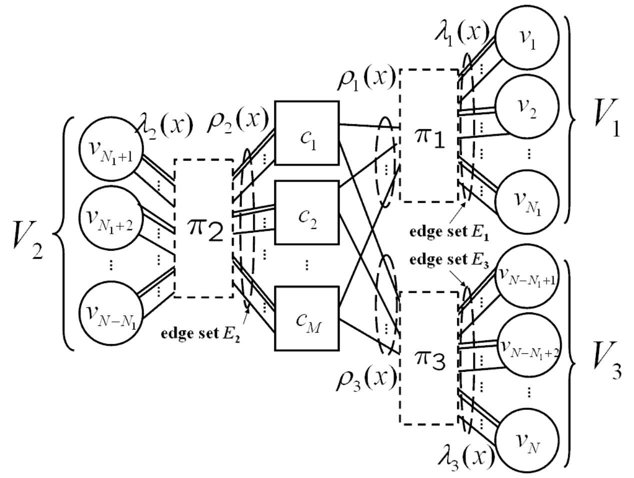

図 1: 非正則 LR-LDPC 符号のタナーグラフ

3 非正則 LR-LDPC 符号アンサンブル

正則 LR-LDPC 符号 [13] は 3 つの変数ノード集合と枝集合をもつマルチエッジタイプの LDPC 符号であり，次数分布の数が小さいとき，通常の LDPC 符号アンサンブルより最小スパン長が大きくなるように設計されている．本研究で提案する非正則 LR-LDPC 符号も，同様の構造をもち，最小スパン長の向上を目指している．

$(N, \lambda(x), \rho(x))$ 非正則 LR-LDPC 符号のタナーグラフ G_{LR} は $G_{\mathrm{LR}} = (V_{\mathrm{LR}}, \cup C, E_{\mathrm{LR}})$, $V_{\mathrm{LR}} \cup C = \phi$, で表される．ここで $V_{\mathrm{LR}} = \bigcup_{i=1}^{3} V_i$ と $E_{\mathrm{LR}} = \bigcup_{i=1}^{3} E_i$ は，それぞれ 非正則 LR-LDPC 符号の 3 つの変数ノード集合と枝集合であり，互いに排反である．$i = 1, 2, 3$ に対し，検査ノード集合 C と変数ノード集合 V_i は，置換関数 π_i によって枝集合 E_i で接続される．変数ノード集合 V_i と検査ノード集合 C との間の次数分布は $\lambda^{(i)}(x)$, $\rho^{(i)}(x)$ で決定される．ここで正則 LR-LDPC 符号と同様，V_i との C 間で構成されるグラフの変数ノードの次数分布 $\lambda^{(i)}(x) = \lambda(x)$ で全て同じだが，検査ノードの次数分布 $\rho^{(i)}(x)$ は同じであるとは限らない．そして C から変数ノード V_1, V_3 へは全て次数 1 の枝で接続されるものとする．また，変数ノードの並び順は V_1, V_2, V_3 の順とする．

このように枝集合を分けて，擬似的に次数が 1 の検査ノードをもつ構造にすることで，以下の定理が成り立つ [13]．

定理 1. LR-LDPC 符号の V_1 もしくは V_3 のビット位置のみに発生した位置 $S_{n,L}$ における長さ L, $L \le N_1$, のバースト消失は必ず BP 復号法で訂正できる．

証明． [13] を参照． □

また，定理 1 を用いて V_1 と V_2，もしくは V_2 と V_3 に発生したバースト消失に対しては，以下の定理が成り立つ．なお，ビット位置集合 $\mathcal{X} \in [1, N]$ に対し，$G_{\mathrm{LR},\mathcal{X}} = (V_{\mathrm{LR},\mathcal{X}} \cup T(V_{\mathrm{LR},\mathcal{X}}), E_{\mathrm{LR},\mathcal{X}})$ をビット位置 $\mathcal{X}$ で構成されるグラフ G_{LR} の部分グラフとする．

定理 2. LR-LDPC 符号の V_1 と V_2 もしくは V_3 と V_2 のビット位置のみに発生した位置 $S_{n,L}$ における長さ L, $L \le N_1$, のバースト消失が発生したと仮定とする．また，このバースト消失は V_1 もしくは V_3 の位置では長さが L_1, $L_1 < L$ であり，そのビット位置は S' であるとする．このとき，部分グラフ $G_{\mathrm{LR},S_{n,L}} = (V_{\mathrm{LR},S_{n,L}} \cup T(V_{\mathrm{LR},S_{n,L}}), E_{\mathrm{LR},S_{n,L}})$ の全ての検査ノードの次数を 2 以上にするためには V_2 のビット位置に少なくとも長さ $L_1 (= L - L_1)$ のバースト消失が発生している必要がある．

証明． [13] を参照． □

定理 1 と 2 は，通常の LDPC 符号では成り立たない．変数ノードのビット位置の並びは V_1, V_2, V_3 の順番であるため，$V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|V_1|}\}$, $V_2 = \{v_{|V_1|+1}, v_{|V_1|+2}, \ldots, v_{|V_1|+|V_2|}\}$, $V_3 = \{v_{|V_1|+|V_2|+1}, v_{|V_1|+|V_2|+2}, \ldots, v_{|V_{\mathrm{LR}}|}\}$ と表わされる．検査ノード集合 C から変数ノード V_1, V_3 への次数は全て 1 であるため，$\rho^{(1)}(x) = \rho^{(3)}(x) = 1$ となり，$\rho^{(2)} = \sum_{i=3}^{d_{\max}} \rho_{i-2}^{(2)} x^{i-3}$ が得られる．検査ノード集合 C から変数ノード集合 V_2 へのノード次数分布は，グラフ全体の検査ノードのノード次数分布と同じであるため， $\tilde{\rho}_{i-2}^{(2)} = \tilde{\rho}_i$ が成り立つことを利用すると

$$\rho_{i-2}^{(2)} = \frac{(i-2)\rho_i}{i(1 - 2\int \rho(x)dx)}, \quad 3 \le i \le d_{\max}, \qquad (7)$$

が得られる．V_1 と C, V_3 と C との間の次数分布は同じであるため，$|V_1| = |V_3|$ が成り立つ．$N_1 = |V_1|$ とすると，$N_1 = N \int_0^1 \rho(x)dx$ である．図 1 に非正則 LR-LDPC 符号のタナーグラフを示す．また，各枝集合 E_1, E_2, E_3 の総数は次式によって与えられる．

$$|E_1| = |E_3| = \frac{N_1}{\int_0^1 \lambda(x)dx}, \quad |E_2| = \frac{N - 2N_1}{\int_0^1 \lambda(x)dx}. \quad (8)$$

4 LDPC 符号アンサンブルの最小スパン長

本節では，[9], [13] と同様に，非正則 LR-LDPC 符号アンサンブルに対し，最小スパン長の下界を導出する．導出にあたっては，ストッピングセット分布 [7], [8] を用いる．より正確に導出したストッピングセット分布 (例えば，[7] の定理 7) を用いることで，厳密な最小スパン長の下界を導出することも可能である．

4.1 最小スパン長の下界について

まず，LDPC 符号アンサンブルの最小スパン長について説明する．$I[P]$ をインジケータ関数とし，P が成立するとき 1，それ以外のとき 0 とする．任意のグラフ G に対し，ビット位置 $S_{L,L}$ の中にあるストッピングセット $S \in \mathcal{S}(G)$ の数を $N_{S_{L,L}}(G)$ とする．同様に任意のグラフ G とビット位置 $n \in [L+1, N]$ に対し，ビット位

置 $S_{n,L}$ の中にあるストッピングセット $S \in \mathcal{S}(G)$ で必ずビット位置 n を含む数を $M_{S_{n,L}}(G)$ とする．

定理 3 ([9])．$L \in [2, M+1]$ においてグラフ G の最小スパン長 $\mu(G)$ が L 以下となる確率 $\Pr[\mu(G) \le L]$ の上界は次式によって得られる．

$$\Pr[\mu(G) \le L] = \sum_{G \in \mathcal{G}(N,\lambda(x),\rho(x))} \Pr(G) I[\mu(G) \le L]$$
$$\le \Pr\big[N_{S_{L,L}}(G) \ge 1\big] + \sum_{n=L+1}^{N} \Pr\big[M_{S_{n,L}}(G) \ge 1\big]. \quad (9)$$

□

式 (9) において，G を G_{LR} に置き換えることで LR-LDPC 符号アンサンブルの最小スパン長 $\mu(G_{\mathrm{LR}})$ を求めることができる [13].

通常の LDPC 符号アンサンブルの場合，枝集合 (もしくは変数ノード集合) は 1 種類であるため，式 (9) の 2 番目の右辺は n, L に依存することなく計算することができる．しかし，LR-LDPC 符号の場合， n, L の値ににしたがって注目する連続したビット位置集合 (バースト消失によって消失するビット位置) が，どの変数ノード集合に含まれるか変化する．ストッピングセットが複数の変数ノード集合にまたがって発生した場合は，n, L の取りうる値によって場合分けてして計算する必要があり，以下の定義 5 と 6 によって場合分けする．

定義 5. $\Pr[N_{S_{L,L}}(G_{\mathrm{LR}}) \ge 1]$ の上界を計算するために，L の値によって以下の 4 つの場合を定義して分ける．(1) $1 \le L \le N_1$, (2) $N_1 + 1 \le L \le N - 2N_1$, (3) $N - 2N_1 + 1 \le L \le M$, (4) $L = M + 1$. □

定義 6. $\Pr[M_{S_{n,L}}(G_{\mathrm{LR}}) \ge 1]$ の上界を計算するために，定義 5 によって (1)–(4) の 4 つに場合分けされ，ビット位置 n によって以下のように定める．

(1) (a) $n \in [L+1, N_1]$, (b) $n \in [N_1+1, N_1+L-1]$, (c) $n \in [N_1+L, N-N_1]$, (d) $n \in [N-N_1+1, N-N_1+L-1]$, (e) $n \in [N-N_1+L, N]$.

(2) (a) $n \in [L+1, L+N_1-1]$, (b) $n \in [L+N_1, N-N_1]$, (c) $n \in [N-N_1+1, N]$.

(3) (a) $n \in [L+1, N-N_1]$, (b) $n \in [N-N_1+1, L+N_1-1]$, (c) $n \in [L+N_1, N]$.

(4) (a) $n \in [L+1, N]$. □

定義 5 で定められた $S_{n,L}$ に発生したバースト消失の区間を n と L の値によって場合分けたものを図 2 に示す．文献 [13] にて示したように，定義 5 と 6 の (2) 以外のビット位置の区間は LDPC 符号の最小スパン長より遥かに長さが小さい，もしくは長いため，(2) にのみ注目し，次の 4.2 節において式 (9) の $\Pr\big[N_{S_{L,L}}(G)\big]$ と $\Pr\big[M_{S_{n,L}}(G)\big]$ を導出する．

4.2 最小スパン長の導出方法

はじめに以下の関数を定義する．

$$W(e_1, e_2, e_3) = \binom{|E_1|}{e_1}\binom{|E_2|}{e_2}\binom{|E_3|}{e_3}, \quad (10)$$

$$F_0(L, w) = \prod_{\substack{d_3, d_4, \ldots, d_{d_{\max}} \\ \sum_i d_i = w \sum_j \tilde{\lambda}_i L}} \binom{\tilde{\rho}_i M}{d_i}, \quad (11)$$

$$F_1(w) = \mathrm{coef}\Bigg[\prod_{i=3}^{d_{\max}} \Big\{(1+x)^{i-2} - (i-2)x\Big\}^{\tilde{\rho}_i M - d_i} \times \Big\{((1+x)^{i-2} - 1\Big\}^{d_i}, x^{\sum_j w \tilde{\lambda}_j}\Bigg], \quad (12)$$

$$F_2(L, w, e) = \mathrm{coef}\Big[\prod_{j=2}^{c_{\max}} (1 + yz^j)^{\tilde{\lambda}_j L}, y^w z^e\Big]. \quad (13)$$

次に $\Pr\big[N_{S_{L,L}}(G)\big]$ の上界を次の補題で示す．

補題 2. 定義 5 (2) の $N_1 + 1 \le L \le N - 2N_1$ の場合，$\Pr[N_{S_{L,L}}(G_{\mathrm{LR}}) \ge 1]$ の上界は次式によって得られる．

$$\Pr[N_{S_{L,L}}(G_{\mathrm{LR}}) \ge 1] \le \sum_{w=1}^{L} \sum_{\substack{w_1 = \max(0, b_1) \\ b_1 = N_1 - L + w}}^{\min(w, N_1)} \Bigg[\sum_{e_1 = 2w_1}^{c_{\max} w_1} \sum_{e_2 = 2w_2}^{c_{\max} w_2} F_2(N_1, w_1, e_1) \times F_2(L - N_1, w_2, e_2) \times \frac{F_0(N_1, w_1) \times F_1(w_2)}{W(e_1, e_2, 0)}\Bigg]. \quad (14)$$

ここで，w_2 は $w_2 = w - w_1$ で得られる．

証明． 付録を参照. □

補題 2 と同様に，$\Pr\big[M_{S_{n,L}}(G)\big]$ の上界を次の系で示す．

系 1. $N_1 + 1 \le L \le N - 2N_1$ の場合，$\Pr[M_{S_{n,L}}(G_{\mathrm{LR}}) \ge 1]$ の上界は n の値にしたがい，定義 6 で示す区間によって次式のように得られる．

(2)-(a)) $n \in [L+1, L+N_1-1]$ において

$$\Pr[M_{S_{n,L}}(G_{\mathrm{LR}}) \ge 1] \le \sum_{w=1}^{L} \sum_{\substack{w_1 = \max(0, b_1) \\ b_1 = w - (n - N_1)}}^{\substack{\min(w, b_2) \\ b_2 = L - (n - N_1)}} \Bigg[\sum_{e_1 = 2w_1}^{c_{\max} w_1} \sum_{e_2 = 2w_2}^{c_{\max} w_2} \times F_2(L - (n - N_1), w_1, e_1) \times F_2(n - N_1 - 1, w_2 - 1, e_2) \times \frac{F_0(N_1, w_1) \times F_1(w_2 - 1)}{W(e_1, e_2, 0)}\Bigg]. \quad (15)$$

ここで，w_2 は $w_2 = w - w_1$ で得られる．

(2)-(b)) $n \in [L+N_1, N-N_1]$ において

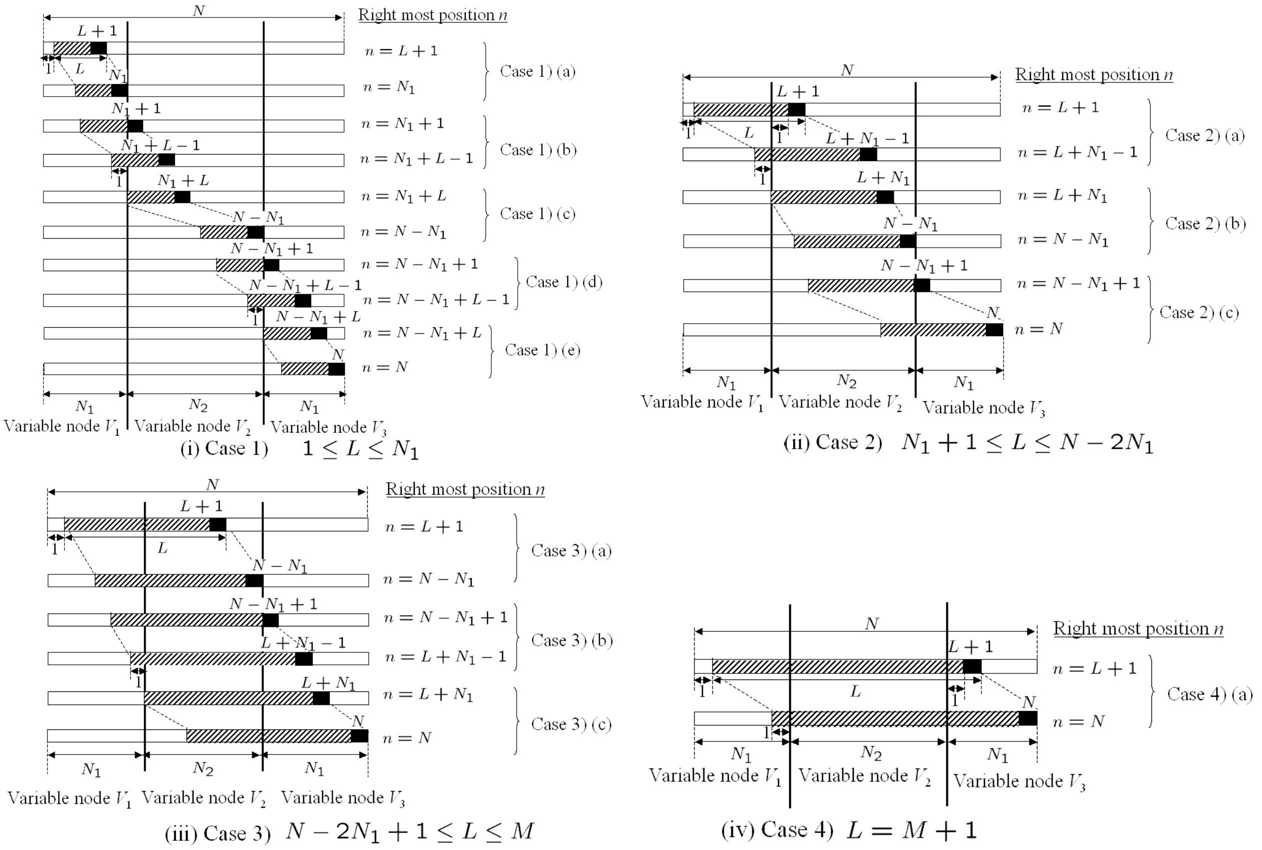

図 2: 定義 6 で定められた $S_{n,L}$ に発生したバースト消失の区間を n と L の値によって場合分けたもの．斜線と黒塗りした区間はそれぞれバースト消失と n ビット目を表わす．**(i):** (1) (a)–(e) **(ii):** (2) (a)–(d) **(iii):** (3) (a)–(c) **(iv):** (4) (a)

$$\Pr[M_{S_{n,L}}(G_{\mathrm{LR}}) \geq 1] \leq \sum_{w_2=1}^{L} \left[\sum_{e_2=2w_2}^{c_{\max} w_2} F_2(L-1, e_2) \times \frac{F_0(0,0) \times F_1(w_2-1)}{W(0,e_2,0)} \right]. \quad (16)$$

(2)-(c)) $n \in [N-N_1+1, N]$ において

$$\Pr[M_{S_{n,L}}(G_{\mathrm{LR}}) \geq 1] \leq \sum_{w=1}^{L} \sum_{\substack{w_3=\max(0,b_1) \\ b_1=w-L+n-(N-N_1)}}^{\substack{\min(w,b_2) \\ b_2=n-(N-N_1)}} \left[\sum_{e_2=2w_2}^{c_{\max} w_2} \sum_{e_3=2w_3}^{c_{\max} w_3} \times F_2(L-n+(N-N_1), w_2, e_2) \times F_2(n-(N-N_1)-1, w_3-1, e_3) \times \frac{F_0(N_3-1, w_3-1) \times F_1(w_3)}{W(0,e_2,e_3)} \right]. \quad (17)$$

ここで，w_2 は $w_2 = w - w_3$ で得られる． □

式 (14)–(17) を式 (9) に代入することで，非正則 LR-LDPC 符号の最小スパン長 $\mu(G_{\mathrm{LR}})$ の下界を求めることができる．

5 まとめと今後の課題

本研究では，ソリッドバースト消失の訂正に適した非正則な低密度パリティ検査 (LDPC) 符号の構成法を提案した．また，提案した符号のアンサンブルに対し，最小スパン長の下界を導出した．

$n \to \infty$ としたときの導出した下界の漸近的な増加率と数値計算結果，また次数分布と従来の LDPC 符号アンサンブルとの関係などは触れていないため，今後の課題である．

謝辞

著者の一人である細谷は，本研究を行うにあたって日ごろより様々なご意見を賜りました，湘南工科大学の小林学先生に感謝いたします．本研究の一部は文部省科学技術研究費補助金若手研究（スタートアップ）No.20860074 の援助に依る．

参考文献

[1] R. G. Gallager, "Low density parity check codes," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. 8, pp. 21–28, Jan. 1962.

[2] M. Luby, M. Mitzenmacher, M. A. Shokrollahi, and D. A. Spielman, "Efficient erasure correcting codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 569–584, Feb. 2001.

[3] M. G. Luby, M. Mitzenmacher, M. A. Shokrollahi, and D. A. Spielman, "Improved low-denstiy parity-check codes using irregular graphs," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 585–598, Feb. 2001.

[4] T. Richardson and R. Urbanke, "The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.47, no. 2, pp.599–618, Feb. 2001.

[5] T. Richardson and R. Urbanke, "Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.47, no. 2, pp.619–637, Feb. 2001.

[6] C. Di, D. Proietti, I. E. Telatar, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, "Finite-length analysis of low-density parity-check codes on the binary erasure channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 48, no. 6, pp. 1570–1579, Jun. 2002.

[7] D. Burshtein and G. Miller, "Asymptotic enumeration methods for analyzing LDPC codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 50, no. 6, pp. 1115-1131, June 2004.

[8] A. Oritsky, K. Viswanathan, and J. Zhang, "Stopping set distribution of LDPC code ensemble," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, no. 3, pp. 929–953, March 2005.

[9] T. Wadayama, "Ensemble analysis on minimum span of stopping sets," *Proc. Information Theory and Its Applications Workshop*, UCSD, Feb. 2006.

[10] E. Paolini and M. Chiani, "Improved low-density parity-check codes for burst erasure channels," *Proc. 2006 IEEE International Conference on Commun.* (ICC06), Istanbul, Turkey, Jun. 2006.

[11] J. Zhang, Y. Wang, M. P. C. Fossorier, and J. S. Yeddia, "Iterative decoding with replicas, " *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 53, no. 5, pp. 1644–1663, May 2007.

[12] T. Richardson and R. Urbanke, *Modern coding theory*, Cambridge University Press, 2008.

[13] G. Hosoya, T. Matsushima, and S. Hirasawa, "A combined matrix ensemble of low-density parity-check codes for correcting a solid burst erasure," *To appear at IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E91-A, Oct. 2008.

付録: 補題 2 の証明

連続したビット位置 $S_{L,L}$ が消失し，部分グラフ $G_{\mathrm{LR},S_{L,L}} = (V_{\mathrm{LR},S_{L,L}} \cup T(V_{\mathrm{LR},S_{L,L}}), E_{\mathrm{LR},S_{L,L}})$ を構成する．$\Pr[N_{S_{L,L}} \geq 1]$ の上界を求めるためには，$G_{\mathrm{LR},S_{L,L}}$ の変数ノードビット位置集合がにストッピングセットとなる数を数え上げればよい．

まず，$N_1 + 1 \leq L \leq M$ の場合に注目しているため，$S_{L,L}$ は変数ノード集合 V_1, V_2 のビット位置両方を含む．よって変数ノード集合 V_3 については考慮する必要はなく，ストッピングセットは V_1, V_2 のビット位置のみとなる．変数ノード集合 V_1, V_2 のストッピングセットのサイズをそれぞれ w_1, w_2 とする．$S_{L,L}$ に含まれる V_1 の数 N_1 と V_2 の数 $L - N_1$ から，w_1, w_2 ビットをストッピングセットとして取り出す組み合わせは

$$\sum_{e=2w_1}^{c_{\max}w_1} \mathrm{coef}\Big[\prod_{j=2}^{c_{\max}} (1+yz^j)^{\tilde{\lambda}_j N_1}, y^w z^e\Big], \tag{18}$$

$$\sum_{e=2w_2}^{c_{\max}w_2} \mathrm{coef}\Big[\prod_{j=2}^{c_{\max}} (1+yz^j)^{\tilde{\lambda}_j (L-N_1)}, y^w z^e\Big], \tag{19}$$

である．

次に V_1 から w_1 ビットを選んだ後, 部分グラフ $G_{\mathrm{LR},S_{L,L}}$ において V_1 からは $\sum_j \tilde{\lambda}_j N_1$ 本の枝が検査ノード集合 C と接続される．ここで，検査ノード C から V_1 へは全て次数 1 の枝で接続される (言い換えると，$\sum_j \tilde{\lambda}_j N_1$ 個の検査ノードが V_1 へ接続されている)．検査ノードは次数 $3, 4, \ldots, d_{\max}$ のノードがあり，それぞれのノードの数は $\tilde{\rho}_i M$ 個ある．d_i を次数 i の検査ノードのうち，$G_{\mathrm{LR},S_{L,L}}$ において V_1 と接続されているノードの数とすると，V_1 へ接続される検査ノードの場合の数は

$$\prod_{\substack{d_3, d_4, \ldots, d_{d_{\max}} \\ \sum_i d_i = w \sum_j \tilde{\lambda}_i N_1}} \binom{\tilde{\rho}_i M}{d_i}, \tag{20}$$

通りの組み合わせがある．よって検査ノードについては，V_1 へ接続されたノードと接続されていないノードの 2 つに分かれる．

定義 1 より，$G_{\mathrm{LR},S_{L,L}}$ がストッピングセットになるためには，V_1 と接続されている $\tilde{\rho}_i M - d_i$ 個の検査ノードは V_2 へは少なくとも 1 本の枝で接続されればよく，また，V_1 と接続されていない d_i 個の検査ノードは V_2 へ少なくとも 2 本，もしくは 0 本の枝で接続されればよい．すなわち，

$$\mathrm{coef}\left[\prod_{i=3}^{d_{\max}} \Big\{(1+x)^{i-2} - (i-2)x\Big\}^{\tilde{\rho}_i M - d_i} \times \Big\{((1+x)^{i-2} - 1\Big\}^{d_i}, x^{\sum_j w_2 \tilde{\lambda}_j}\right], \tag{21}$$

通りの接続方法がある．

また，部分グラフ $G_{\mathrm{LR},S_{L,L}}$ の場合の数は

$$\binom{|E_1|}{e_1}\binom{|E_2|}{e_2}, \tag{22}$$

である．

よって，式 (18)–(21) を乗算し式 (22) で割ることで式 (14) を得る． □