

木符号におけるリスト復号法を用いた判定帰還方式について

新家 稔央[†] 松嶋 敏泰^{††} 平澤 茂一^{††}

A Decision Feedback Scheme Using List Decoding for Tree Codes

Toshihiro NIINOMI[†], Toshiyasu MATSUSHIMA^{††}, and Shigeichi HIRASAWA^{††}

あらまし リスト復号を用いる一般化 Viterbi アルゴリズム (GVA) は、復号拘束長を大きくしたときの漸近的な有効性について、よく知られている。本論文では、リスト復号器を用いた新しい判定帰還を提案し、サバイバを複数本選ぶことが判定帰還においても有効であることを、木符号に対するランダム符号化とシミュレーションにより示す。特に、ランダム符号化による結果は、GVA が低レートで Viterbi アルゴリズム (VA) による誤り指数よりも大きな値をとり得ることと同様、提案する GVA に基づく判定帰還方式が従来の VA に基づく判定帰還方式の誤り指数の下界を改善するという類似な結果が得られる。

キーワード リスト復号法、一般化 Viterbi 復号法、ランダム符号化、帰還誤り指数、判定帰還方式 (ARQ 方式)

1. ま え が き

一般化 Viterbi アルゴリズム (GVA) は後述する二つの点から Viterbi アルゴリズム (VA) を一般化しており、木符号を用いたときの符号化定理が与えられている [1]。そして、トレリス符号に対して VA を用いたときと比べ、低レートで誤り指数を大きくできる木符号の存在が示されている。一方、判定帰還 (ARQ) 方式では、最ゆうの符号語をそのまま出力する復号器と比較すると、同等の復号器の複雑さで更に低い復号誤り確率が得られることが、ブロック符号の帰還誤り指数 (feedback exponent) [5] で示される。

本研究では、固定されたリストサイズによるリスト復号によって選ばれたリストの中に、実際に送信されたメッセージが含まれているかどうかを判定する基準を提案し、信頼度が低ければ再送を行う方式を考える。この問題設定を、直ちに判定帰還方式に用いることはできないが、リスト復号器を中間段階で用いる GVA に適用することで、GVA を用いた新しい判定帰還方

式とその判定規準を提案する。そして、このときに与えられる符号化定理を、木符号に対する解析手法 [1]、帰還誤り指数の考え方 [5]、及び、T. Hashimoto による解析手法 [4] を用いて導出する。その結果、この方式が判定帰還を行わない GVA と同様、低レートで、VA を用いた判定帰還方式 (VA-ARQ) よりも大きい誤り指数をとる通信路の例を示す。なお、定理の導出にあたり、通信路は離散的無記憶を仮定し、帰還通信路に誤りは生じないものとする。また、提案する方式に対し、具体的な符号を与え、白色ガウス雑音の加わる通信路において、計算機シミュレーションを行う。

2. 従来の研究について

2.1 GVA とリスト復号法 [1]

畳込み符号を対象に考えると、GVA では VA に対して、以下の 2 点を一般化している。

(1) 復号化の拘束長は、符号化の拘束長よりも短くてよいこと。

(2) 各々のノードで行うパス選択では、生き残りパスを複数本を選ぶことが可能なこと。

以上の手続きを繰り返した後、VA と同様、既知シンボルの入力によってトレリスを終端する。このとき、生き残りパスが複数本残るので、更にチェックテイルを適宜付加して、パスを 1 本に決める。

GVA は、最終的に一つの情報記号列 (メッセージ) を出力する。しかし、ノードごとに複数本のサバイバ

[†] 神奈川工科大学電気電子工学科, 厚木市
Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Kanagawa Institute of Technology, 1030 Shimo-ogino, Atsugi-shi, 243-0902 Japan

^{††} 早稲田大学理工学部経営システム工学科, 東京都
Dept. of IE and Management Systems, School of Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Ohkubo, Shinjyuku-ku, Tokyo, 169-8555 Japan

を残していくため、長さ N の情報記号列 \mathbf{u}^N に対する復号誤り確率 $P_e(\mathbf{u}^N)$ の上界は、

$$P_e(\mathbf{u}^N) \leq P_{ea}(\mathbf{u}^N) + P_{eb}(\mathbf{u}^N),$$

$$P_{ea}(\mathbf{u}^N) = [\text{任意のノードにおけるパス選択で、正しいパス } \mathbf{u}^N \text{ が、リストに入らない確率}],$$

$$P_{eb}(\mathbf{u}^N) = [\text{チェックテイルでのパス選択で、正しいパスが選ばれない確率}]$$

である。ここで、 $P_{ea}(\mathbf{u}^N)$ はリスト復号の復号誤り確率であることに注意する。チェックテイルを適宜付加すると、 $P_{eb}(\mathbf{u}^N)$ を $P_{ea}(\mathbf{u}^N)$ に比べて十分小さくできる。

主要な通信路でリスト復号の復号誤り確率上界の指数部に注目すると、推定した符号語をただ一つだけ出力する復号器に比べて、低レートで指数部の値を改善していることが多く、このような場合に GVA は優れた性能をもつ。

2.2 帰還誤り指数の解析

Forney [5] では帰還誤り指数を定義し、ブロック符号を用いた場合の判定帰還における符号化定理を示した。畳込み符号や木符号を用いた場合には、[3], [4], [8] ~ [10] などの研究がある。畳込み符号や木符号では、ランダム符号を用いても、すべての符号化系列が独立でないため、解析上、厳しい制約が加えられる。このため、判定帰還と同じ判定規準を用いたもともども、ブロック符号と同様の解析が行えないことがある。しかしながら、[4] では [3] で求められている誤り指数を大きく改善する手法を畳込み符号に対して示している。そこで本論文では、符号語が互いに独立でない判定帰還方式を対象に解析された手法の中で、大きな誤り指数を得ている [4] と同様な解析手法を用いる。

3. 提案アルゴリズム

3.1 準備

以下では入力アルファベット $A = \{0, 1, \dots, a-1\}$ 、出力アルファベット $B = \{0, 1, \dots, b-1\}$ の離散無記憶通信路 $P = \{P_{ij}, j \in A, i \in B\}$ を仮定し、送信される情報記号系列(メッセージ)を \mathbf{u}^N で表す。 \mathbf{u}^N は、符号器へ入力される q 元アルファベット $\mathcal{U} = \{0, 1, \dots, q-1\}$ からなる長さ N の系列である。したがって、ある情報記号系列 \mathbf{u}_i^N は、 $\mathbf{u}_i^N = u_{i,1}u_{i,2}\dots u_{i,t}\dots u_{i,N}$ 、ただし、 $u_{i,t} \in \mathcal{U}$ 、 $t = 1, 2, \dots, N$ 、 $i = 1, 2, \dots, q^N$ で示され

る。木符号は、図 1 のように q 進木で示すことができ、ある情報記号系列はルートから伸びる 1 本のパスに対応する。すなわち、 \mathbf{u}_i^N の第 t ブランチは、 $u_{i,t}$ に対して符号化が行われている。符号化に用いる 1 ブランチあたりの通信路の入力アルファベットの数を v とすると、レート R は、 $R = \frac{1}{v} \ln q$ と定義できる。

なお、パス \mathbf{u}_i^N の第 1 ブランチから第 n ブランチまでの部分系列を \mathbf{u}_i^n で記す。また、第 1 ブランチから第 n ブランチまでのパス \mathbf{u}_i^n を情報系列とする符号系列及び受信系列を、それぞれ、 $\mathbf{x}_i^{v^n}$ 及び \mathbf{y}^{v^n} と表し、その第 t ブランチに対する符号系列及び受信系列を、それぞれ、 $x_{i,t}^v$ 及び y_t^v で記すことにする。

更に、GVA の復号拘束長を L ブランチ、チェックテイルの長さを T ブランチで表す。GVA では、 q^{L-1} 個の状態ごとにサバイバを残していく。このとき、一つのノードにおいて残されるサバイバは S ($S \geq 1$) 本である。この S 本のサバイバの集合をリストと呼ぶことにする。

3.2 アルゴリズム

GVA と同様、以下に示すアルゴリズムでは (1) ~ (4) の再帰手続きと、チェックテイルにおけるパス選択とに分かれる。(1) ~ (3) は [1] と同じ GVA の手続きである。本アルゴリズムでは、ARQ の再送要求を出すために (4) の手続きを加える (4) の手続きは Viterbi アルゴリズムを用いた ARQ [3] において、サバイバにラベルづけを行う手続きと似ているが、本アルゴリズムでは [3] とは異なる判定基準を用いている^(注1)。

本論文で提案するアルゴリズムを [1] と同様、次のように示す。

[再帰手続き] レベル L まで、すべてのパスを伸長し、そのラベルを *Accept* とおく。そして、レベル n ($L \leq n \leq N$) に対して以下の手続きを繰り返す。

(1) 初期条件

レベル $n-1$ において、 q^{L-1} 個の状態ごとにリストが保持されているとする。リストの要素は、長さ $n-1$ ブランチの S 本のサバイバである。

(注1): [3] では、VA の各ノードごとに、最大ゆう度のパスと 2 番目にゆう度の大きいパスのゆう度比を計算してしきい値と比べ、最大ゆう度のパスに *Accept* か *Reject* のラベルづけを行っている。VA をリストサイズが 1 の復号器と見れば、ここで提案している判定基準は、その一般化とも見れる。すなわち、両者の共通のねらいは、各ノードにおける復号誤りを帰還通信路を用いて減少させることである。しかし [3] のアルゴリズムでは、トレリス全体のパスの中から、必ず最大ゆう度と 2 番目のパスの比較を行うのに対し、提案アルゴリズムは簡略アルゴリズムの GVA をベースとしている点で異なる。

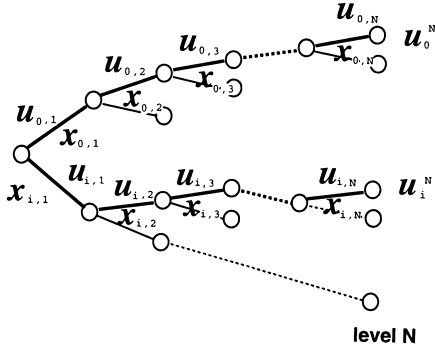


図 1 木符号の例 ($q = 2$)
Fig. 1 Example of tree codes ($q = 2$).

(2) パス伸長

q^{L-1} 個のリストの各々のサバイバに対して、1 ブランチの伸長を行う。すなわち、情報記号列 \mathbf{u}^{n-1} に対応するパスがサバイバとして残っているとしたとき、 q 本のパスを伸長し、 $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n-1}u$, $u \in \mathcal{U}$ に対するパスのゆう度を計算する。

(3) パス選択

レベル n の q^{L-1} の各々のノードにおいて、 qS 本のパスから、ゆう度の大きい順に S 本のパスをリストとする。

(4) サバイバの信頼度の判定

あるノードにおけるリスト \mathcal{L} をゆう度の大きい順に

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{u}_{(1)}^n, \mathbf{u}_{(2)}^n, \dots, \mathbf{u}_{(S)}^n\}$$

で表し、同じノードの $S+1$ 番めにゆう度の大きいパスを $\mathbf{u}_{(S+1)}^n$ (注2) で表す。このとき、リストを構成するすべてのサバイバに対して、以下の判定基準によりラベルを更新する。

$$\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(1)}^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(S+1)}^{vn})} \leq \Delta, \quad \Delta \geq 1 \quad (1)$$

であれば、リストに含まれるすべてのパス $\mathbf{u}_{(i)}^n$, $i = 1, 2, \dots, S$ に対し *Reject* のラベルをつける。そうでなければ、 $\mathbf{u}_{(i)}^n$, $i = 1, 2, \dots, S$ に対し *Accept* のラベルをつける。ただし、一度 *Reject* となったサバイバのラベルは *Reject* のままとする (図 2 参照)。すべてのノードにおいてすべてのパスが *Reject* であれば、最初のブランチから再送要求を行う。

[チェックテイルにおけるパス選択]

長さ $L-1$ の既知シンボルの列 $\mathbf{u}^{L-1} \in \mathcal{U}^{L-1}$ により、再び上記 (1) ~ (4) を用いてサバイバを S 本

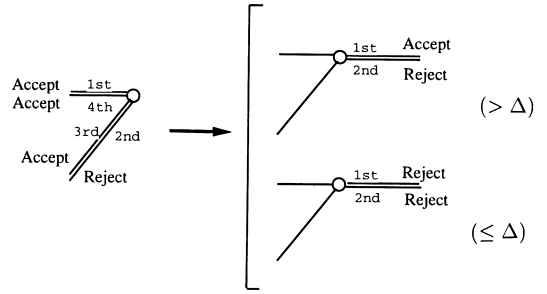


図 2 信頼度の判定 ($q = 2, S = 2$)
Fig. 2 Testing the list of survivors ($q = 2, S = 2$).

に絞る。更に、 $T - (L - 1)$ の既知シンボルの入力をして、 S 本のサバイバより、最終的に 1 本のパスを選択する。このときに選ばれたパスのラベルが *Accept* であれば復号成功として、このパスを復号、*Reject* であれば最初のブランチから再送要求を行う。

各々のノードで選ばれる各リストは、一般には、*Accept* のパスと *Reject* のパスの両方から構成される。あるレベルのあるノードで選ばれたリストは、このノードで最もゆう度の大きいパスと、このノードにおけるパス選択によって捨てられることが決定した $S+1$ 番目に大きいパスのゆう度比によって、その信頼度が (1) により判定される。そして、ゆう度比 (式 (1) 左辺) がしきい値 Δ を越えれば、1 ブランチ前のレベルで *Accept* であったパスは *Accept* になり、*Reject* であったパスは、そのまま *Reject* となる。もし、しきい値 Δ を越えなかった場合、そのノードのリストに残ったすべてのパスが *Reject* になる。

4. ランダム符号化による評価

4.1 準備

実際に送信された情報記号列が \mathbf{u}_0^N のとき、次の確率を定義する。

$$P_x(\mathbf{u}_0^N) = [\text{再送要求がおきる確率}]$$

$$P_e(\mathbf{u}_0^N) = [\text{復号誤りがおきる確率}]$$

$P_{ea}(\mathbf{u}_0^N) = [\text{レベル } N + L - 1 \text{ で作られる } S \text{ 本のリストから } \mathbf{u}_0^N \text{ が外れる確率}]$

$P_{eb}(\mathbf{u}_0^N) = [\text{レベル } N + T \text{ において、} S \text{ 本のリストからパスを 1 本に絞ったとき、} \mathbf{u}_0^N \text{ が選ばれない}]$

(注 2): 本論文では、レベル n のノードにおいて、情報記号列 \mathbf{u}_k^N に対するゆう度を $Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_k^{vn})$ と表すのに対し、ゆう度が k 番目に大きいパスのゆう度を $Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(k)}^{vn})$ と使い分ける。すなわち、() はあるノードでのパスのゆう度に対する順位を表す添字である。

確率]

また、これらの確率を $P_*(\mathbf{u}^N)$ で表したとき、すべてのメッセージに対する平均を

$$P_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}^N} P_*(\mathbf{u}^N)$$

と表すことにする。ただし、 $*$ $\in \{x, e, ea, eb\}$ 。更に、Forney [5] に習い、

$$Pr(E_1) = P_x + P_e$$

$$Pr(E_2) = P_e$$

と定義する。このとき、以下が成り立つ。

$$Pr(E_1) \leq P(E_{1a}) + P(E_{1b})$$

$$Pr(E_2) \leq P_{ea} + P_{eb}$$

ここで、 $P(E_{1a})$ 、 $P(E_{1b})$ は、

$$P(E_{1a}) \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} \sum_{n=L}^{N+L-1} P_{E_{1a},n}(\mathbf{u}_0^N),$$

$$P_{E_{1a},n}(\mathbf{u}_0^N) = Pr \left[\begin{array}{l} \text{レベル } n \text{ のノードで,} \\ \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{S+1}^{vn})} \leq \Delta \end{array} \right],$$

$$P(E_{1b}) \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} P_{E_{1b}}(\mathbf{u}_0^N),$$

$$\begin{aligned} P_{E_{1b}}(\mathbf{u}_0^N) \\ \leq Pr \left[\begin{array}{l} \text{レベル } N+T \text{ のノードで, ある} \\ i \neq 0 \text{ に対し, } \frac{Pr(\mathbf{y}^{v(N+T)} | \mathbf{x}_i^{v(N+T)})}{Pr(\mathbf{y}^{v(N+T)} | \mathbf{x}_0^{v(N+T)})} \geq 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

である。 $P(E_{1a})$ は、レベル L からレベル $N+L-1$ までの間に、再送要求または復号誤りがおきる確率である。この確率は、正しいパスと $S+1$ 番目のパスのゆう度比が、しきい値 Δ をこえない確率で上界できる。また、 $P(E_{1b})$ は、レベル $N+L-1$ で正しいパスが *Accept* で残っている場合に、レベル $N+T$ で再送要求または復号誤りのおきる確率である^(注3)。 P_{ea} 、 P_{eb} についても、

$$P_{ea} \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} \sum_{n=L}^{N+L-1} P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N),$$

$$P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N) = Pr \left[\begin{array}{l} \text{レベル } n \text{ のノードで,} \\ \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{S+1}^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} > \Delta \end{array} \right],$$

$$P_{eb} \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} P_{eb}(\mathbf{u}_0^N)$$

$$\begin{aligned} P_{eb}(\mathbf{u}_0^N) \\ \leq Pr \left[\begin{array}{l} \text{レベル } N+T \text{ のノードで, ある} \\ i \neq 0 \text{ に対し, } \frac{Pr(\mathbf{y}^{v(N+T)} | \mathbf{x}_i^{v(N+T)})}{Pr(\mathbf{y}^{v(N+T)} | \mathbf{x}_0^{v(N+T)})} \geq 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

が成り立つ。 P_{eb} も、レベル $N+T$ におけるパス選択の復号誤り確率であるから、 $P(E_{1b})$ と同様に上界ができる^(注4)。

4.2 主要な結果

提案アルゴリズムに対し、ランダム符号化を用いた評価結果を以下の補題に示す。はじめに、補題1及び補題2で、アンサンブルに対する $P(E_{1a})$ と P_{ea} の平均の上界を示す。次に、チェックテイルの長さがある程度とれば、 $Pr(E_1)$ 及び $Pr(E_2)$ は、 $P(E_{1a})$ 及び P_{ea} が支配することを [1] の結果を用いて示す。最後にこれらより [3] ~ [5] と同様、帰還誤り指数を求めて定理に示す。なお、 $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, \dots, q_{a-1}\}$ を通信路シンボルの入力確率分布とする。

[補題1] ランダムな木符号を用いることで、 $P(E_{1a})$ のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}P(E_{1a})$ が次式で上界される。ここで、 S はリストサイズである。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}P(E_{1a}) \\ \leq \frac{NS!e^{vSR\rho_x}}{(1 - e^{-v\epsilon_x})^S} \\ \cdot \exp \left\{ -Lv \left[E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q}) - \sigma_x \frac{S \ln \Delta}{Lv} \right] \right\} \\ 0 \leq \rho_x \leq 1, \sigma_x \geq 0, \\ \epsilon_x = E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q}) - S\rho_x R > 0 \quad (2) \end{aligned}$$

(注3): したがって、 $P(E_{1b})$ は、正しいパスのゆう度がレベル $N+T$ において、比較されるどれかのパスのゆう度より小さくなる確率で上界できる。レベル $N+T$ で誤りパスのゆう度が正しいパスより大きいとき、誤りパスのラベルが *Reject* なら再送要求、*Accept* なら復号誤りとなる。

(注4): より正確には、誤りパスのゆう度が正しいパスのゆう度より大きく、しかも、ラベルが *Accept* のときに限り復号誤りとなるが、このように上界として用いることは可能である。

$$\begin{aligned}
 & E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q}) \\
 &= -\ln \left[\sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-S\sigma_x} \right) \right. \\
 & \quad \cdot \left. \left(\sum_{k \in A} q_k P_{jk}^{\sigma_x/\rho_x} \right)^{S\rho_x} \right] \quad (3)
 \end{aligned}$$

(証明) 付録参照.

[補題 2] ランダムな木符号を用いることで, P_{ea} のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}P_{ea}$ が次式で上界される.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}P_{ea} \\
 & \leq \frac{NS!e^{vSR\rho_e}}{(1-e^{-v\epsilon_e})^S} \\
 & \quad \cdot \exp \left\{ -Lv \left[E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q}) + \sigma_e \frac{S \ln \Delta}{Lv} \right] \right\} \\
 & \quad 0 \leq \rho_e \leq 1, \quad \sigma_e \geq 0, \\
 & \quad \epsilon_e = E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q}) - S\rho_e R > 0 \quad (4)
 \end{aligned}$$

(証明) 付録参照.

次に, チェックテイルをある程度とれば, $P(E_{1b})$ 及び P_{eb} が無視できることを示そう. はじめに, P_{eb} に注目する. 補題 3 に [1] で得られた結果を示す.

[補題 3] ランダムな木符号を用いることで, P_{eb} のアンサンブルに対する平均 $\mathcal{E}P_{eb}$ が次式で上界される.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}P_{eb} \leq \frac{e^{vR\rho'}}{1-e^{-v\epsilon'}} \cdot \exp \left[-v(T+1)E_o(\rho', \mathbf{q}) \right] \\
 & \quad 0 \leq \rho' \leq 1, \quad \epsilon' = E_o(\rho', \mathbf{q}) - \rho'R > 0 \quad (5) \\
 & E_o(\rho', \mathbf{q}) \\
 &= -\ln \left[\sum_{k \in B} \left(\sum_{j \in A} q_j P_{kj}^{\frac{1}{1+\rho'}} \right)^{1+\rho'} \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

(証明) [1] p.875, A-9 参照.

そこで, 補題 2, 補題 3 より, チェックテイルの長さを

$$T \geq \left[\frac{E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q}) + \sigma_e \frac{S \ln \Delta}{Lv}}{E_o(\rho', \mathbf{q})} \right] L - 1 \quad (7)$$

としてやれば, 全体の復号誤り確率 $Pr(E_2)$ は, P_{ea} の指数部 $E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q}) + \sigma_e \frac{S \ln \Delta}{Lv}$ によって漸近的に支配される.

$P(E_{1b})$ も補題 3 式 (5) の右辺で上界できる ((注 3) 参照). したがって, 同様に, 補題 1 と比較すればよい. しかし, 判定帰還では, $P(E_{1a})$ に対して P_{ea} が十分小さくとられる. したがって, (7) の条件により, $P(E_{1a})$ 及び P_{ea} の指数部が, $Pr(E_1)$ 及び $Pr(E_2)$ を支配する.

また, 次の補題が [4] と同様に導かれる.

[補題 4] 次式を同時に満たす木符号が存在する.

$$\begin{aligned}
 & Pr(E_1) \leq 2\mathcal{E}Pr(E_1), \\
 & Pr(E_2) \leq 2\mathcal{E}Pr(E_2) \quad (8)
 \end{aligned}$$

(証明) 付録 Ap.4 参照

以上より, 提案アルゴリズムに対し [5] の定義に基づく, 帰還誤り指数を求めてみよう.

まず, $-\frac{1}{vL} \ln Pr(E_1) \rightarrow 0 (L \rightarrow \infty)$ として, $\frac{S \ln \Delta}{Lv}$ の上界を求め, 次に σ_e, ρ_e を最適化し, 漸近的に達成することが可能なリストサイズ S のリスト復号器を用いたときの帰還誤り指数 $e_1^{(S)}(R)$ を求める. すなわち,

$$\begin{aligned}
 e_1^{(S)}(R) &= \max_{\mathbf{q}, \sigma_e, \rho_e \in \mathcal{D}_2} \left\{ E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q}) \right. \\
 & \quad \left. + \sigma_e \max_{\mathbf{q}, \sigma_x, \rho_x \in \mathcal{D}_1} \left[\frac{E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q})}{\sigma_x} \right] \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_1 = \{0 \leq \rho_x \leq 1, \quad \sigma_x \geq 0,$$

$$\epsilon_x = E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q}) - S\rho_x R > 0\} \quad (10)$$

$$\mathcal{D}_2 = \{0 \leq \rho_e \leq 1, \quad \sigma_e \geq 0,$$

$$\epsilon_e = E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q}) - S\rho_e R > 0\} \quad (11)$$

ここで

$$e_F^{(S)}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathbf{q}, \sigma_x, \rho_x \in \mathcal{D}_1} \frac{E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q})}{\sigma_x} \quad (12)$$

と定義する^(注 5). $E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q})$ は, σ_x に対して上に凸な関数であるので, $\frac{E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q})}{\sigma_x}$ の上界は, $\rho_x = \nu\sigma_x$ とおけば,

$$e_F^{(S)}(R) = \lim_{\sigma_x \rightarrow 0} \frac{E_o(S, \sigma_x, \nu\sigma_x, \mathbf{q})}{\sigma_x} \quad (13)$$

$$\frac{E_o(S, \sigma_x, \nu\sigma_x, \mathbf{q})}{\sigma_x} - \nu SR > 0 \quad (14)$$

(注 5): $S = 1$ とおいたとき, $e_F^{(S)}(R)$ は, Forney のブロック符号における帰還誤り指数と接続構造をなす誤り指数 $e_F(R)$ [4]p.568, 式 (11) と一致するので, このような定義を用いたが物理的な意味は特にもたない.

で得られる．そこで [5] と同様，ロピタルの定理を用い，

$$E_{oF}(S, \nu, \mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\sigma_x \rightarrow 0} \frac{E_o(S, \sigma_x, \nu \sigma_x, \mathbf{q})}{\sigma_x} \quad (15)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \sigma_x} E_o(S, \sigma_x, \nu \sigma_x, \mathbf{q}) \Big|_{\sigma_x=0} \quad (16)$$

を求めて次の定理を得る．

[定理] 提案アルゴリズムに対し，帰還誤り指数の下界 $e_1^{(S)}(R)$ は，

$$e_1^{(S)}(R) = \max_{\mathbf{q}, \sigma_e, \rho_e \in \mathcal{D}_2} \left\{ E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q}) + \sigma_e \cdot e_F^{(S)}(R) \right\}, \quad (17)$$

$$e_F^{(S)}(R) = \max_{\mathbf{q}, \nu \in \mathcal{D}_3} E_{oF}(S, \nu, \mathbf{q}), \quad (18)$$

$$\mathcal{D}_3 = \{ E_{oF}(S, \nu, \mathbf{q}) - \nu SR > 0, \nu > 0 \} \quad (19)$$

$$E_{oF}(S, \nu, \mathbf{q}) = S \sum_{k \in B} \sum_{j \in A} q_j P_{kj} \ln \left[\frac{P_{kj}^{1/\nu}}{\sum_{j \in A} q_j P_{kj}^{1/\nu}} \right]^\nu \quad (20)$$

で与えられる^(注6)．

残念ながら，一般の離散無記憶通信路においては， $e_1^{(S)}(R)$ をこれ以上，簡単に表現することはできない．そこで，強雑音通信路（例えば [13], [14] などを参照）において， S に対する $e_1^{(S)}(R)$ を計算する． \mathbf{q} を最適化して得られる通信路容量 C の強雑音通信路を仮定すると，

$$E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q}) = S \sigma_e \left[2 - S \sigma_e \left(1 + \frac{1}{S \rho_e} \right) \right] C \quad (21)$$

$$E_{oF}(S, \nu, \mathbf{q}) = S \left(2 - \frac{1}{\nu} \right) C \quad (22)$$

$$e_F^{(S)}(R) = S \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R}{C}} \right) C \quad (23)$$

であるので，これより， $e_1^{(S)}(R)$ を数値計算すると，図 3 に示したようになる．同様に， $\mathbf{q} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$ ，誤り確率 $p \stackrel{\text{def}}{=} P_{01} = P_{10} = 0.01$ の 2 元対称通信路において，式 (17) を計算すると，誤り指数の下界は図 4 に示すとおりである．

それぞれの図で， $S = 1$ のとき，誤り指数は [4] で求められた VA-ARQ [3] の誤り指数の下界に一致する．これは [1] で得られた判定帰還を行わない GVA

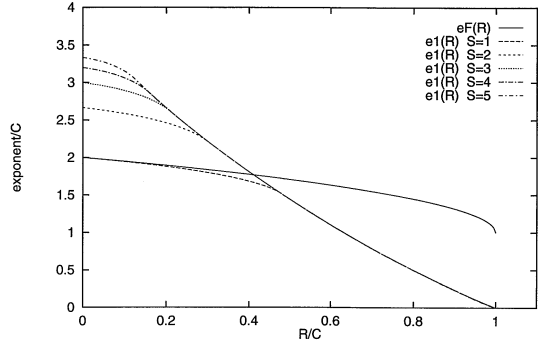


図 3 VNC における帰還誤り指数
Fig. 3 Exponents on VNC.

及び VA の関係と双対な結果である．更に，同じグラフの上で， $e_F(R)$ ^(注7)と $e_1^{(S)}(R)$ を比較してみた^(注8)．すると， $S \geq 2$ に対して， $e_F(R)$ よりも $e_1^{(S)}(R)$ が大きな値をもつレートが存在することがわかる．

4.3 リスト復号器を用いることによる計算量の増加について

各々のレベルで， q^{L-1} のノードで $S+1$ 本のパスを選び出すために必要なパスの比較回数 $\chi_{GVA}(L, S)$ は，バブルソートを用いたとしても， $\chi_{GVA}(L, S) \leq q^L(S+1)$ である．一方，ブランチ拘束長を K としたとき，VA における q^{K-1} のノードに必要なパスの比較回数 $\chi_{VA}(K)$ は， $\chi_{VA}(K) = q^K$ である．いま，GVA 及び VA を用いた方式に対して，その真の誤り指数を，それぞれ， $e_{GVA}^{(S)*}(R)$ ， $e_{VA}^*(R)$ と書くと，両者

(注 6): 定理において， $\nu > 0$ を $\nu > 1$ と制約を厳しくしても， $e_F^{(S)}(R)$ の上界は変わらない [4]．また， $S = 1$ としたとき， $e_1^{(S)}(R)$ ，

$e_F^{(S)}(R)$ ， $E_{oF}(S, \nu, \mathbf{q})$ ， $E_o(S, \sigma_e, \rho_e, \mathbf{q})$ は，文献 [4] において，それぞれ，p.571 Corollary 2 の $e_1(R, p)$ ，p.568 式 (13) の $e_F(R, p)$ ，p.568 式 (9) の $E_{Fo}(\sigma, p)$ ，p.568 式 (8) の $E_o(s, \rho, p)$ に一致する．

(注 7): [4] では，VA-ARQ [3] で使われた判定基準をブロック符号に用いたとき，通信路を限定するが，Forney のブロック符号の帰還誤り指数を達成できることを示している．しかし，残念ながら，同様の解析を VA-ARQ [3] そのものには適用できない．今回の結果は，VA-ARQ [3] の誤り指数の下界が $e_F(R)$ を達成することが示せたとしても，リスト復号器とその判定基準を用いることで， $e_F(R)$ を更に改善できる通信路の例を示している．なお，最近 [3] の判定基準でなく [16]，及び，サブパイバの事後確率に判定基準をとった VA-ARQ に対する解析結果が報告されている [17]．

(注 8): [1] では，VA の誤り指数上界が既知なので，GVA の誤り指数下界と比較し，GVA の誤り指数があるレートで VA より真に大きいことを示している．これに対し，本論文では，VA-ARQ [3] の帰還誤り指数の上界が未知であるため，誤り指数の下界どうしてしか比較を行っていない．VA-ARQ [3] の誤り指数の上界が明らかになれば，本論文で提案した方式の誤り指数の下界と比較が真に可能となるが，その導出はむずかしいと思われ，本論文では提案した方式の誤り指数の下界の導出のみにとどめる．

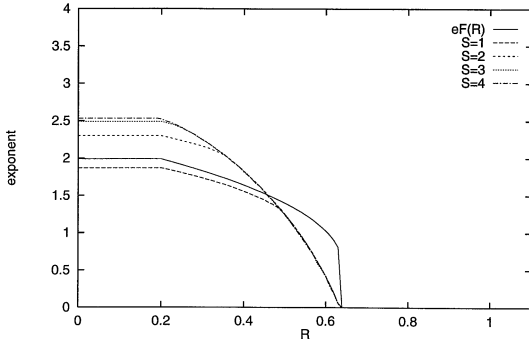


図4 BSC(0.01)における帰還誤り指数
Fig.4 Exponents on BSC ($p = 0.01$).

が同等の誤り確率を得るためには、指数部を比較して、

$$\frac{L}{K} = \frac{e_{VA}^*(R)}{e_{GVA}^{(S)*}(R)}$$

このとき、計算量の比をとると、

$$\frac{\chi_{GVA}(L, S)}{\chi_{VA}(K)} \leq q^{-L \left\{ \left(\frac{e_{GVA}^{(S)*}(R)}{e_{VA}^*(R)} - 1 \right) - \frac{\log_q S + 1}{L} \right\}}$$

であるから、 $e_{GVA}^{(S)*}(R) > e_{VA}^*(R)$ であるレートでは、 L が十分大きいとき、GVA を用いた方式が同じ誤り確率を達成するために必要な計算量は小さくなる^(注9)。

5. シミュレーションによる評価

2元入力の加法的白色ガウス雑音 (AWGN) 通信路において、情報シンボルあたりの SN 比 2.0 dB, $N = 32$, 符号器 $g1 = [533, 533, 676, 737, 355, 3]_8$, $g2 = [733, 533, 676, 737, 355, 3]_8$ (符号器のブランチ拘束長 48) である $R = 1/2$ の畳込み符号 [12] によりシミュレーションを行った。結果を図5~7に示す。図中の各点はしきい値とチェックテイルの長さを変えてシミュレーションを行い、チェックテイルの長さは復号誤り確率に対して、最も実効レートを大きくする値を選んでいく。なお、実効レートは(復号したシンボル数) / (送信したシンボル数) と定義する。

図5では、 $L = 4$ と固定し、 S の増加とともにリスト復号誤りの減少を確認した。図6では $L = 4$ とし、適当な長さのチェックテイルを付加して最終的に選ばれたパスの誤り確率と実効レートに対する評価を行った。図7では、 L を一定ではなく、各時点で選択するサバイバの本数を一定にして、誤り確率と実効レートの関係を調べた。図6において、リスト復号器のリス

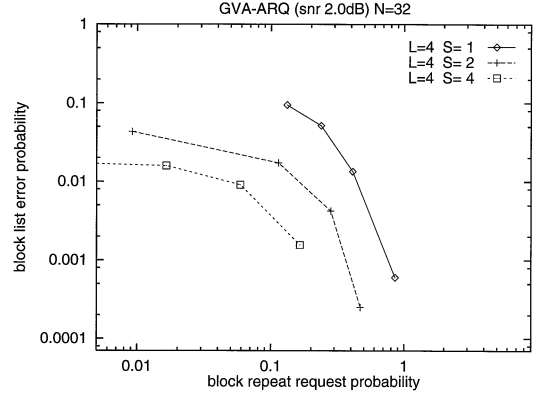


図5 シミュレーション $P_x(\mathbf{u}^N)$ と $P_{ea}(\mathbf{u}^N)$ の関係
Fig.5 Simulation results, $P_x(\mathbf{u}^N)$ VS $P_{ea}(\mathbf{u}^N)$.

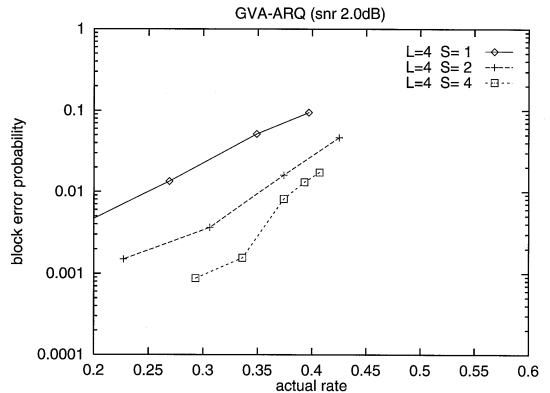


図6 シミュレーション実効レートと $P_{ea}(\mathbf{u}^N)$ の関係
Fig.6 Simulation results, actual rate VS $P_{ea}(\mathbf{u}^N)$.

トサイズを増やしたとき、チェックテイルを余分に付加しても、なお、誤り確率に対する実効レートの改善がなされている。図7では、各ノードにおけるパスの比較回数を一定にしている。 $L = 5, S = 1$ に対し、パスの比較回数を同じにするため復号拘束長を短くとした $L = 4, S = 2$ が優れている結果が得られた。しかしながら、 $L = 4, S = 2$ に対し、前者と同様に復号拘束長を短くとした $L = 3, S = 4$ との比較を行うと、その差は前者と比べ非常に小さくなった。したがって、具体的符号を与えた場合でも、同じ計算量のリスト復号器とその判定基準により S を適当に選ばば、パフォーマンスが向上する領域が存在することが明らかになった。

ここで示した結果は、前章で示したランダム符号化

(注9):(注8)と同様である。

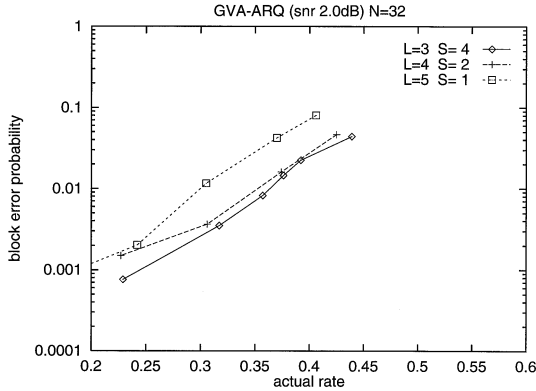


図7 シミュレーション実効レートと $P_e(u^N)$ の関係
Fig. 7 An Example of competition set (CS).

と必ずしも同じ仮定をとらないが、提案したリスト復号器を用いた判定帰還方式の有効性がシミュレーションによっても確認できた。

6. む す び

従来、リスト復号器を用いて、サブパイバを複数本選んでおくことが、木符号、畳込み符号の復号に漸近的に有効であることが示されていた [1]。本論文では、リスト復号誤りの確率をリスト復号に対する判定基準を設けることで小さくおさえ、選ばれたリストの中から、GVA と同様、チェックテイルを付加して最終的に 1 本のパスを出力する判定帰還を提案した。この方式が有効であることを、

(1) GVA におけるリスト復号誤りに対して再送要求を行う判定基準を新しく提案し、アルゴリズムを示したこと。

(2) 木符号など、構造をもつ符号化に適用可能なランダム符号化の解析手法の中で、VA-ARQ [3] に対して最も大きい帰還誤り指数を得る手法に準じて提案アルゴリズムを解析したこと。

(3) その結果、例にあげた通信路において、低レートでリストサイズを大きくすると、 $e_F(R)$ や [4] に示された VA-ARQ [3] の誤り指数の下界を改善できる通信路の例を示したこと^(注10)。

(4) 具体的符号化を与えてシミュレーションを行った結果、適当なリストサイズに対して提案した方式の有効性が確認されたこと。

の手順で明らかにした。誤り指数で得られた結果に対しては、GVA が低レートで VA の誤り指数よりも大

きな値をとり得ること [1] と似たような結果が、判定帰還の場合にも成り立つことを、提案した方式に対する帰還誤り指数で示すことができた。

GVA の特徴として、いったん、誤りが生じると、これがバースト的な誤りを引き起こす傾向があることが知られている。本論文では、誤り指数による漸近的特性及びシミュレーションによる評価で提案した方式の有効性を示したが、より実際のシステムを想定した場合の評価については、今後の課題としたい。

謝辞 日ごろ御指導頂く、神奈川工科大学中村誠教授に感謝致します。また、貴重なコメントを頂いた査読委員、編集委員の皆様にも厚くお礼申し上げます。

文 献

- [1] T. Hashimoto, "A list-type reduced-constraint generalization of the Viterbi algorithm," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-33, no.6, pp.866-876, Nov. 1987.
- [2] J.B. Anderson and S. Mohan, "Sequential coding algorithms: A survey and cost analysis," IEEE Trans. Commun., vol.COM-32, no.2, Feb. 1984.
- [3] H. Yamamoto and K. Itoh, "Vitebi decoding algorithm for convolutional codes with repeat request," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-26, no.5, pp.540-547, Sept. 1980.
- [4] T. Hashimoto, "On the error exponent of convolutionally coded ARQ," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-40, no.2, pp.567-575, March 1994.
- [5] G.D. Forney, Jr., "Exponential error bounds for erasure, list and decision feedback schemes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-14, no.2, pp.206-220, March 1968.
- [6] G.D. Forney, Jr., "Convolutional codes II: Maximum likelihood decoding," Inf. Control, vol.25, no.3, pp.222-266, July 1974.
- [7] L.I. Bluestein, "Exponential error bounds for discrete memoryless channels with sequential decision feedback," Inf. Control, vol.16, no.4, pp.311-318, June 1970.
- [8] R.J. Fang, "Lower bounds on reliability functions of variable-length nonsystematic convolutional codes for channels with noiseless feedback," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-17, no.2, pp.161-171, March 1971.
- [9] A. Drukarev, "Hybrid ARQ error control using sequential decoding," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-23, no.4, pp.311-318, 1970.
- [10] T. Hashimoto, "A coded ARQ scheme with the generalized Viterbi algorithm," IEEE Trans. Inf. Theory,

(注10): 誤り指数の下界のみの比較なので、得られた誤り指数が真に大きい値をもつとはいえないが、重要な離散無記憶通信路において $e_F(R)$ は、他の誤り指数と比較して非常に大きな値をもち、更に大きな値のバウンドを示せたことを重要と考える。強雑音通信路、2元対称通信路の例で示したように、あるレートの範囲でこのように大きな帰還誤り指数を得た研究はこれまでになかった。

- vol.39, no.2, pp.423-432, March 1993.
- [11] C.E. Shannon, R.G. Gallager, and E.R. Berlekamp, "Lower bounds to error probability for coding for discrete memoryless channels," *Inf. Control*, vol.10, no.1, pp.65-103, 1967.
 - [12] J.L. Massey and D.J. Costello, "Nonsystematic convolutional codes for sequential decoding in space applications," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol.COM-19, no.5, pp.806-813, Oct. 1971.
 - [13] A.J. Viterbi and J.K. Omura, *Principles of communication and coding*, NY:McGraw-Hill, 1979.
 - [14] R.G. Gallager, *Information theory and reliable communication*, NY:Wiley, 1968.
 - [15] G.D. Forney, Jr., *Concatenated codes*, MA:M.I.T., 1966.
 - [16] T. Hashimoto, "Composite scheme LR + Th for decoding with erasures and its effective equivalence to Forney's rule," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.45, no.1, pp.78-93, Jan. 1999.
 - [17] 橋本 猛, "畳込み符号に対する Forney の消失判定について;" 第 21 回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp.9-12, 1998.

付 録

付録では、主に補題 1 について [4] 及び [1] に沿った導出を示す。しかしながら [4] が [3] の判定基準を用いた場合の評価であるのに対し、本論文では提案した判定基準を用いている。また、リスト復号器をランダムな木符号に対して用いる点で [1] と同じであるが、付録では判定帰還方式に対する評価を行うため、提案した判定基準に対する $Pr(E_{1a})$ の上界を算出している。

なお [4] では、復号誤り確率に対してブロック符号を用いたときに利用できる厳しい評価法を得ているが、本論文においては適用できず、ユニオン上界を算出するのみとなっている。これは [4] において畳込み符号を用いた場合と同様である。しかしながら、本論文では、知られている畳込み符号の帰還誤り指数の下界より大きな値を得ることができている。

Ap.1 補題 1 の証明

$$P(E_{1a}) \leq \frac{1}{q^N} \sum_{\mathbf{u}_0^N} \sum_{n=L}^{N+L-1} P_{E_{1a,n}}(\mathbf{u}_0^N) \quad (A.1)$$

であるから、はじめに $P_{E_{1a,n}}(\mathbf{u}_0^N)$ を評価する。

A を正しいパス \mathbf{u}_0^n を含まない任意の S 本のパス全体の集合とし、その要素をコンペティションセット (CS) と呼ぶ。Ap.2 で述べるインジケータ $\phi(\mathbf{y}^{vn})$ の

上界を用いることにより、 $P_{E_{1a,n}}(\mathbf{u}_0^N)$ は次のようにおさえられる。

$$\begin{aligned} P_{E_{1a,n}}(\mathbf{u}_0^N) &\leq \sum_{\mathbf{y}^{vn}} Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn}) \cdot \phi(\mathbf{y}^{vn}) \\ &\leq \Delta^{S\sigma_x} \sum_{\mathbf{y}^{vn}} Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn}) \\ &\cdot \left\{ \sum_{A_0} \sum_{A_1} \sum_{A_2} \prod_{i=1}^S \left[\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \right]^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right\}^{\rho_x} \end{aligned} \quad (A.2)$$

ここで、 $\mathbf{x}_1^{vn}, \dots, \mathbf{x}_S^{vn}$ は、ひとつの CS に属する誤りパスの符号語を表す。また、 \sum_{A_0} は図 A.2 に示すような CS のとるすべてのパス形状に対する和、 \sum_{A_1} は CS のパス形状をひとつに固定したときの誤りパスの分岐点、すなわち、あらゆる t_1, t_2, \dots, t_s に対する和を示す。更に、 A_2 は t_1, t_2, \dots, t_s を固定したときの CS の集合に対する和を示す。すなわち、 $\sum_A = \sum_{A_0} \sum_{A_1} \sum_{A_2}$ である。

$0 \leq \rho_x \leq 1$ と制約を設ければ、 $(\sum_i a_i)^\rho \leq \sum_i a_i^\rho, 0 \leq \rho \leq 1$ より、式 (A.2) は、

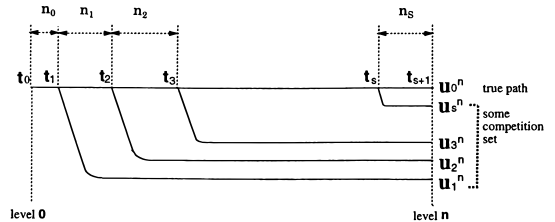


図 A.1 CS の例

Fig. A.1 An example of competition set (CS).

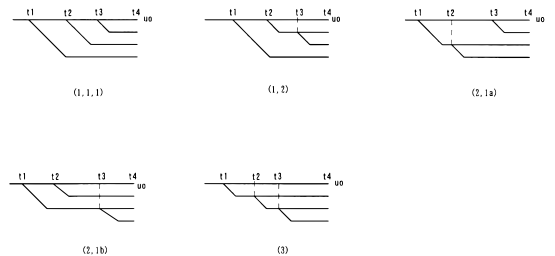


図 A.2 CS の例 $S = 3$

Fig. A.2 An example of competition set (CS), $S = 3$.

$$\begin{aligned}
 & P_{E1a,n}(\mathbf{u}_0^N) \\
 & \leq \Delta^{S\sigma_x} \sum_{A_0} \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}^{vn}} Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn}) \\
 & \left\{ \sum_{A_2} \prod_{i=1}^S \left[\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \right]^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right\}^{\rho_x} \quad (\text{A}\cdot\text{3})
 \end{aligned}$$

で押さえられる．

木符号では，任意の2本のパスに対して，ルートより分岐がはじまるまで，同じ符号語をもつ．そこで，以下では \mathbf{u}_0^n とCSに含まれるパスの分岐に注意し，式(A・3)に含まれるパスどうしの同じ符号語をもつ区間に対するゆう度比が1になることに着目して整理を行う．この計算はCSのパス形状によって異なる．以下では，図A・2で示す $S=3$ の場合について，導出過程を示すが，一般の場合も同様に行える．そこで，式(A・3)のパスに対するゆう度をブランチに対するゆう度の積で書き換える．すなわち，

$$\begin{aligned}
 Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn}) &= \prod_{t=1}^n Pr(\mathbf{y}_t^v | \mathbf{x}_{i,t}^v), \\
 \sum_{\mathbf{y}^{vn}} &= \sum_{\mathbf{y}_1^v} \sum_{\mathbf{y}_2^v} \cdots \sum_{\mathbf{y}_n^v}
 \end{aligned}$$

であり，更に，パス i の第 t ブランチに対するゆう度を $P_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} Pr(\mathbf{y}_t^v | \mathbf{x}_{i,t}^v)$ と略記すれば，図A・2の(1,1,1)に示すパス形状に対する式(A・3)の部分積 $P_{E1a,n}(\mathbf{u}_0^N)^{(1,1,1)}$ は，以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
 & P_{E1a,n}(\mathbf{u}_0^N)^{(1,1,1)} \\
 & \leq \Delta^{3\sigma_x} \cdot \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}_{t_1+1}^v} \cdots \sum_{\mathbf{y}_{t_4}^v} \prod_{t=t_1+1}^{t_2} P_0(t)^{1-\sigma_x} \\
 & \cdot \prod_{t=t_2+1}^{t_3} P_0(t)^{1-2\sigma_x} \cdot \prod_{t=t_3+1}^{t_4} P_0(t)^{1-3\sigma_x} \\
 & \cdot \left\{ \sum_{A_2} \prod_{t=t_1+1}^{t_2} \prod_{i=1}^1 P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \cdot \prod_{t=t_2+1}^{t_3} \prod_{i=1}^2 P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right. \\
 & \left. \cdot \prod_{t=t_3+1}^{t_4} \prod_{i=1}^3 P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right\}^{\rho_x} \quad (\text{A}\cdot\text{4})
 \end{aligned}$$

特定の木符号についてこれ以上は解析できないので，ランダム符号化を施す．すなわち，以下では，ブランチごとに独立に，かつ，各々のブランチの v 個の入力アルファベットに対し，確率分布 $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, \dots, q_{a-1}\}$ に従って，独立にシンボルを割り付けたときのあらゆる

木符号に対する平均を解析する．この平均を $E[\cdot]$ ，及び， $\bar{\cdot}$ で表すことにする． $E[\sum \cdot] = \sum E[\cdot]$ ，及び，独立な確率変数 X, Y に対して，

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] \quad (\text{A}\cdot\text{5})$$

が成り立つことから，式(A・4)に対する平均を求めて，

$$\begin{aligned}
 & \overline{P_{E1a,n}^{(1,1,1)}} \\
 & \leq \Delta^{3\sigma_x} \cdot \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}_{t_1+1}^v} \cdots \sum_{\mathbf{y}_{t_4}^v} \\
 & E \left[\prod_{t=t_1+1}^{t_2} P_0(t)^{1-\sigma_x} \cdot \prod_{t=t_2+1}^{t_3} P_0(t)^{1-2\sigma_x} \right. \\
 & \cdot \left. \prod_{t=t_3+1}^{t_4} P_0(t)^{1-3\sigma_x} \right] \\
 & \cdot E \left[\left\{ \sum_{A_2} \prod_{t=t_1+1}^{t_2} \prod_{i=1}^1 P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right. \right. \\
 & \cdot \prod_{t=t_2+1}^{t_3} \prod_{i=1}^2 P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \\
 & \left. \left. \cdot \prod_{t=t_3+1}^{t_4} \prod_{i=1}^3 P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right\}^{\rho_x} \right] \quad (\text{A}\cdot\text{6})
 \end{aligned}$$

$E[x^\rho] < [E(x)]^\rho$ ， $0 \leq \rho \leq 1$ ，及び，分岐したパスどうしてブランチごとに符号語が独立であることから，再び式(A・5)を用いれば，

$$\begin{aligned}
 & \overline{P_{E1a,n}^{(1,1,1)}} \\
 & \leq \Delta^{3\sigma_x} \cdot \sum_{A_1} \sum_{\mathbf{y}_{t_1+1}^v} \cdots \sum_{\mathbf{y}_{t_4}^v} \prod_{t=t_1+1}^{t_2} \overline{P_0(t)^{1-\sigma_x}} \\
 & \cdot \prod_{t=t_2+1}^{t_3} \overline{P_0(t)^{1-2\sigma_x}} \cdot \prod_{t=t_3+1}^{t_4} \overline{P_0(t)^{1-3\sigma_x}} \\
 & \cdot \left\{ \sum_{A_2} \prod_{t=t_1+1}^{t_2} \prod_{i=1}^1 \overline{P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}}} \right. \\
 & \cdot \prod_{t=t_2+1}^{t_3} \prod_{i=1}^2 \overline{P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}}} \\
 & \left. \cdot \prod_{t=t_3+1}^{t_4} \prod_{i=1}^3 \overline{P_i(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}}} \right\}^{\rho_x} \quad (\text{A}\cdot\text{7})
 \end{aligned}$$

上式で， $P_k(t)$ は，もはや， k に依存してないので，以下では， $P(t)$ と書く．

次に [1] p.874 lemma A-1 では, A_2 の要素が, た
 だか次式でおさえられることを示している .

$$|A_2| \leq e^{[n_1+2n_2+\dots+S n_S-S(L-1)]vR}$$

ただし, パスの分岐点間の長さ (ブランチ数) を,

$$\begin{aligned} n_1 &= t_2 - t_1, \\ n_2 &= t_3 - t_2, \\ &\dots\dots\dots \\ n_S &= t_{S+1} - t_S, \\ n_1 + n_2 + \dots + n_S &= n \end{aligned}$$

とおいた . ここでは, $S = 3$ としているから,

$$|A_2| \leq e^{[n_1+2n_2+3n_3-3(L-1)]vR}$$

でおさえられ, これを用いると式 (A.7) は以下のように
 なる .

$$\begin{aligned} &\leq \Delta^{3\sigma_x} \cdot \sum_{A_1} \\ &e^{\rho_x n_1 vR} \prod_{t=t_1+1}^{t_2} \left[\sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P(t)^{1-\sigma_x} P(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}}} \right] \\ &e^{2\rho_x n_2 vR} \prod_{t=t_2+1}^{t_3} \left[\sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P(t)^{1-2\sigma_x} \left(P(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right)^2} \right] \\ &e^{3\rho_x n_3 vR} \prod_{t=t_3+1}^{t_4} \left[\sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P(t)^{1-3\sigma_x} \left(P(t)^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right)^3} \right] \end{aligned}$$

また, ひとつのブランチに対する符号語についても,
 シンボルごとの符号化は独立であるので,

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{y}_t^v} \overline{P(t)^a} \left(\overline{P(t)^b} \right)^c \\ &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_v} \\ &\left(\sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_v} q_{i_1} P_{j_1 i_1}^a \dots q_{i_v} P_{j_v i_v}^a \right) \\ &\left(\sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_v} q_{i_1} P_{j_1 i_1}^b \dots q_{i_v} P_{j_v i_v}^b \right)^c \\ &= \left\{ \sum_j \left(\sum_i q_i P_{j i}^a \right) \left(\sum_i q_i P_{j i}^b \right)^c \right\}^v \end{aligned}$$

を用いると, 式 (A.7) は,

$$\begin{aligned} &\overline{P_{E1a,n}^{(1,1,1)}} \\ &\leq \Delta^{3\sigma_x} \cdot \sum_{A_1} e^{[n_1+2n_2+3n_3-3(L-1)]vR\rho_x} \\ &\left[\sum_{j \in B} \alpha_1(j) \beta_1(j) \right]^{vn_1} \left[\sum_{j \in B} \alpha_2(j) \beta_2(j) \right]^{vn_2} \\ &\cdot \left[\sum_{j \in B} \alpha_3(j) \beta_3(j) \right]^{vn_3}, \\ &\alpha_\ell(j) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{j i}^{1-\ell\sigma_x} \right), \\ &\beta_\ell(j) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{j i}^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right)^{\ell\rho_x}, \\ &0 \leq \rho_x \leq 1, \sigma_x \geq 0 \end{aligned} \tag{A.8}$$

と書ける . 一般に, A_1 についての和は, 次のように
 書き直せる .

$$\begin{aligned} \sum_{A_1} &= \sum_U, \\ U &= \{n_1 + n_2 + \dots + n_S = n, \\ &n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_{S-1} \geq 0, n_S \geq L\} \end{aligned} \tag{A.9}$$

したがって, 次の上界式が導ける .

$$\begin{aligned} &\overline{P_{E1a,n}^{(1,1,1)}} \leq e^{-3(L-1)vR\rho_x} \cdot \Delta^{3\sigma_x} \\ &\cdot \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[e^{\rho_x R} \sum_{j \in B} \alpha_1(j) \beta_1(j) \right]^{vn_1} \\ &\cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} \left[e^{2\rho_x R} \sum_{j \in B} \alpha_2(j) \beta_2(j) \right]^{vn_2} \\ &\cdot \sum_{n_3=L}^{\infty} \left[e^{3\rho_x R} \sum_{j \in B} \alpha_3(j) \beta_3(j) \right]^{vn_3} \end{aligned} \tag{A.10}$$

さて, 図 A.2 の他のパス形状に対しても,

$$\gamma_\ell(j) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{j i}^{\frac{\ell\sigma_x}{\rho_x}} \right)^{\rho_x}$$

と定義すれば, 以下に示すとおり, 同様な上界式が導
 ける . 例を示せば,

$$\overline{P_{E1a,n}^{(1,2)}} \leq e^{-3(L-1)vR\rho_x} \cdot \Delta^{3\sigma_x}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[e^{\rho_x R} \sum_{j \in B} \alpha_1(j) \beta_1(j) \right]^{vn_1} \\ & \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} \left[e^{2\rho_x R} \sum_{j \in B} \alpha_3(j) \beta_1(j) \gamma_2(j) \right]^{vn_2} \\ & \cdot \sum_{n_3=L}^{\infty} \left[e^{3\rho_x R} \sum_{j \in B} \alpha_3(j) \beta_3(j) \right]^{vn_3} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 11)$$

これらの上界式は、無限等比級数の和であるが、これがすべて収束するための条件は、

$$E_o(3, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q}) - 3\rho_x R > 0 \quad (\text{A}\cdot 12)$$

であることが後述する定理 A-1 を用いることで示される。

一般の S についても、あらゆるパス形状が $S!$ 個で押さえられることと、各々のパス形状について、やはり、定理 A-1 を用いることで、 σ_x, ρ_x の制約が同様に求まる。したがって、

$$\begin{aligned} & \frac{P_{E1a,n}(\mathbf{u}_0^N)}{(1 - e^{-v\epsilon})^S} \\ & \leq \frac{S! e^{vSR\rho_x}}{(1 - e^{-v\epsilon})^S} \\ & \cdot \exp \left\{ -Lv \left[E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q}) - \sigma_x \frac{S \ln \Delta}{Lv} \right] \right\}, \\ & 0 \leq \rho_x \leq 1, \quad \sigma_x \geq 0, \\ & \epsilon = E_o(S, \sigma_x, \rho_x, \mathbf{q}) - S\rho_x R > 0 \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 13)$$

と上界でき、補題 1 が得られる。

Ap.2 補題で用いるインジケータの上界について $P(E1a)$ の上界を導出するにあたり、インジケータ $\phi(\mathbf{y}^{vn})$ を、

$$\begin{aligned} P_{E1a,n}(\mathbf{u}_0^N) & \leq \sum_{\mathbf{y}^{vn}} Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn}) \cdot \phi(\mathbf{y}^{vn}) \\ \phi(\mathbf{y}^{vn}) & = \begin{cases} 1, & \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(S+1)}^{vn})} \leq \Delta \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

とおく。また、 P_{ea} の上界についても、インジケータ $\psi(\mathbf{y}^{vn})$ を、

$$\begin{aligned} P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N) & \leq \sum_{\mathbf{y}^{vn}} Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn}) \cdot \psi(\mathbf{y}^{vn}) \\ \psi(\mathbf{y}^{vn}) & = \begin{cases} 1, & \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(S+1)}^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \geq \Delta \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

とおく(注11)。本節では、提案した判定基準に対し、これらのインジケータのチャーノフの上界について説明する。

ある情報記号列 \mathbf{u}_m^N について、

$$\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_m^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(S+1)}^{vn})} \leq \Delta \quad (\text{A}\cdot 14)$$

であれば、必ず、

$$\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_m^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(k)}^{vn})} \leq \Delta, \quad k = 1, 2, \dots, S+1 \quad (\text{A}\cdot 15)$$

が成り立つ。したがって、 $P_{E1a,n}(\mathbf{u}_0^N)$ は、正しいパスのゆう度 $Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})$ がある CS に属するすべてのパス $i \in CS, i = 1, 2, \dots, S$ のゆう度に対して、

$$\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})} \leq \Delta, \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (\text{A}\cdot 16)$$

である条件を用いて上界することができる。式 (A-16) の条件を [13], p.215, Problem 3.16 と同様に緩めた条件、

$$\prod_{i=1}^S \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})} \leq \Delta^S \quad (\text{A}\cdot 17)$$

を用いれば、[4] 同様、インジケータを、

$$\phi(\mathbf{y}^{vn}) \leq \Delta^{S\sigma_x} \left\{ \sum_A \prod_{i=1}^S \left[\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \right]^{\frac{\sigma_x}{\rho_x}} \right\}^{\rho_e}$$

で上界することができる。

$P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N)$ の上界に用いるインジケータの上界についても、

$$\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(S+1)}^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_m^{vn})} \geq \Delta \quad (\text{A}\cdot 18)$$

であれば、必ず、

$$\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(k)}^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_m^{vn})} \geq \Delta, \quad k = 1, 2, \dots, S+1 \quad (\text{A}\cdot 19)$$

が成り立つので、同様、

$$\prod_{i=1}^S \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \geq \Delta^S \quad (\text{A}\cdot 20)$$

(注 11): $\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(S+1)}^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} > \Delta \Rightarrow \frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_{(S+1)}^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \geq \Delta$ であるから、 $\psi(\mathbf{y}^{vn})$ を定義する不等式に等号を含めても、 $P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N)$ の上界が可能である。これは [15], p.107Appendix A と同様である。

を用いることができる。したがって、

$$\psi(\mathbf{y}^{vn}) \leq \Delta^{-S\sigma_e} \left\{ \sum_A \prod_{i=1}^S \left[\frac{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_i^{vn})}{Pr(\mathbf{y}^{vn} | \mathbf{x}_0^{vn})} \right]^{\frac{\sigma_e}{\rho_e}} \right\}^{\rho_e}$$

を用いることができる。ここで示したインジケータの上界がことなるほかは、 $P_{ea,n}(\mathbf{u}_0^N)$ の上界に関してすべて $P_{E1a,n}(\mathbf{u}_0^N)$ と同様であり、補題 2 を導くことができる。

Ap.3 定理 A-1

以下に、補題 A-1 ~ 補題 A-3 を示し、これらより、定理 A-1 を導出する。この定理は、Ap.1 で示した各パス形状の上界式 ($S = 3$ とすれば式 (A-13) ~ (A-17)) に対する無限等比級数の収束条件が式 (A-19) ($S = 3$ の場合は式 (A-18)) のように簡略化されることを示すのに用いる。すなわち、後述する最も一般的な D_3 に対し、以下に示す補題を用い、その条件を D_7 に置き換える。

本論文で定義した $E_o(S, \sigma, \rho, \mathbf{q})$ は、 $S = 1$ のとき、[5]における $E_o(s, \rho, \mathbf{p})$ 、及び [4]における $E_o(s, \sigma s, \rho)$ に一致し、その性質がよく知られている。補題 A-1 では、その凸性を用いる。

[補題 A-1] $0 \leq \sigma, 0 \leq \rho \leq 1, \theta \geq 1$ に対し、以下が成立する。

$$D_1 = \left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(1, \ell\sigma, \ell\rho, \mathbf{q})}{\ell\rho} > R \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(1, \ell\sigma, \theta\ell\rho, \mathbf{q})}{\theta\ell\rho} > R \right\}$$

とおけば、 $D_1 \supseteq D_2$ 。

(証明) [4] Appendix A に示されているように、 $E_o(1, \ell\sigma, \ell\rho, \mathbf{q})$ は、 ρ に対し上に凸である。ゆえに、 $\frac{E_o(1, \ell\sigma, \ell\rho, \mathbf{q})}{\ell\rho} \geq \frac{E_o(1, \ell\sigma, \theta\ell\rho, \mathbf{q})}{\theta\ell\rho}$ であり、補題が成り立つ。

Ap.1 における式 (A-10) の導出に見られるように、一般性を失うことなく、あるパス形状のある時刻 $t_i \sim t_{i+1}$ の区間に対して、

$$D_3 = \left\{ (\sigma, \rho) \mid e^{k\rho R} \sum_j \alpha_\ell(j) \gamma_{m_1}(j) \cdot \gamma_{m_2}(j) \cdots \gamma_{m_k}(j) < 1 \right\} \quad (\text{A-21})$$

であることが、ユニオン上界を求めるための無限等比級数の収束条件として要求される。ここで、 k は、 $t_i \sim t_{i+1}$ の区間で区別できる誤りパスの本数、 m_1, m_2, \dots, m_k は、その後これら k 本の誤りパスが

ら、それぞれ何本のパスが分岐するかを表す。また、 $\ell = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ である。

例として、 $S = 8$ のとき、図 A-3 に示すパス形状に対し、 k, m_1, \dots, m_k 、及び、 ℓ がとる値を示そう。このとき、式 (A-21) の条件は、

$$\left\{ (\sigma, \rho) \mid e^{4\rho R} \sum_j \alpha_7(j) \gamma_1(j) \gamma_1(j) \cdot \gamma_2(j) \gamma_3(j) < 1 \right\} \quad (\text{A-22})$$

となる。

補題 A-2 では、式 (A-21) で示された (σ, ρ) の条件よりも、次に示す D_4 に対する条件が厳しいことを示そう。

[補題 A-2]

$$D_4 = \left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(1, \ell\sigma, \frac{\ell}{m_1}\rho, \mathbf{q})}{\frac{\ell}{m_1}\rho} > R, \right. \\ \left. \frac{E_o(1, \ell\sigma, \frac{\ell}{m_2}\rho, \mathbf{q})}{\frac{\ell}{m_2}\rho} > R, \right. \\ \dots, \\ \left. \frac{E_o(1, \ell\sigma, \frac{\ell}{m_k}\rho, \mathbf{q})}{\frac{\ell}{m_k}\rho} > R \right\} \quad (\text{A-23})$$

とおけば、 $D_3 \supseteq D_4$ 。

(証明)

$w_k = \sum_{i=1}^k m_i, \Gamma_k(j) = \gamma_{m_1}(j) \gamma_{m_2}(j) \cdots \gamma_{m_k}(j)$ と定義すれば、

$$D_3 = \left\{ (\sigma, \rho) \mid \sum_j \alpha_\ell(j) \Gamma_k(j) < e^{-k\rho R} \right\} \quad (\text{A-24})$$

と表せる。このとき、 $i, 0 \leq i \leq k-1$ に対し、次の不等式が成り立つことに注目する。

$$\left[\sum_j \alpha_\ell(j) \Gamma_{k-i}^{\frac{w_k}{w_{k-i}}}(j) \right]^{\frac{w_{k-i}}{w_k}} \\ \leq \left[\sum_j \alpha_\ell(j) \Gamma_{k-(i+1)}^{\frac{w_k}{w_{k-(i+1)}}}(j) \right]^{\frac{w_{k-(i+1)}}{w_k}} \\ \cdot \left[\sum_j \alpha_\ell(j) \gamma_{m_{k-i}}^{\frac{w_k}{m_{k-i}}}(j) \right]^{\frac{m_{k-i}}{w_k}} \quad (\text{A-25})$$

この不等式では、左辺の i を $i+1$ にしたものが、右辺の第 1 項になっていることに注意したい。まず、こ

の不等式が成り立つことを示そう．左辺は次のように書きなおせる．

$$\begin{aligned} & \left[\sum_j \alpha_\ell(j) \Gamma_{k-i}^{\frac{w_k}{w_k-i}}(j) \right]^{\frac{w_k-i}{w_k}} \\ &= \left[\sum_j \alpha_\ell(j) \Gamma_{k-(i+1)}^{\frac{w_k}{w_k-i}}(j) \gamma_{m_{k-i}}^{\frac{w_k}{w_k-i}}(j) \right]^{\frac{w_k-i}{w_k}} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 26)$$

更に λ を, $0 < \lambda < 1$ としてヘルダーの不等式を用いれば, 式 (A·26) は, 次式で押さえられる．

$$\begin{aligned} & \leq \left\{ \left[\sum_j \alpha_\ell(j) \Gamma_{k-(i+1)}^{\frac{w_k}{w_k-i}}(j) \right]^\lambda \right. \\ & \quad \left. \left[\sum_j \alpha_\ell(j) \gamma_{m_{k-i}}^{\frac{w_k}{w_k-i}}(j) \right]^{1-\lambda} \right\}^{\frac{w_k-i}{w_k}} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 27)$$

ここで, $\lambda = \frac{w_k-(i+1)}{w_k-i}, 1-\lambda = \frac{m_{k-i}}{w_k-i}$ とおけば, 式 (A·25) の不等式が得られる．

式 (A·25) 左辺は, $i = 0$ のとき式 (A·24) の不等式の左辺に一致する．したがって, 式 (A·25) を繰り返し使えば,

$$\sum_j \alpha_\ell(j) \Gamma_k(j) \leq \prod_{i=1}^k \left[\sum_j \alpha_\ell(j) \gamma_{m_i}^{\frac{w_k}{m_i}}(j) \right]^{\frac{m_i}{w_k}} \quad (\text{A}\cdot 28)$$

が示せる．

最後に, $w_k = \ell$ であること, また, $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$, 及び, $A > 0$ としたとき,

$$\prod_{i=1}^k a_i < A^k \Leftrightarrow a_1 < A, a_2 < A, \dots, a_k < A$$

を用い, $-\ln[\cdot]$ をとれば, 補題が証明できる．

次に, $E_o(k, \sigma, \rho, \mathbf{q})$ の k に対する凸性について, 補題 A-3 に示す．

[補題 A-3]

$$\begin{aligned} D_5 &= \left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(k, \sigma, \rho, \mathbf{q})}{k} > \rho R \right\}, \\ D_6 &= \left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(k+1, \sigma, \rho, \mathbf{q})}{k+1} > \rho R \right\} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 29)$$

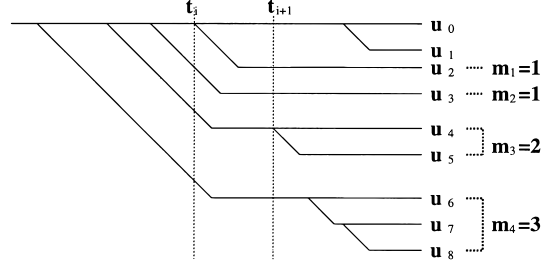


図 A·3 CS の例 $S = 8$

Fig. A·3 An example of competition set (CS), $S = 8$.

とおけば, $D_5 \supseteq D_6$.

(証明)

$\frac{E_o(k, \sigma, \rho, \mathbf{q})}{k} \geq \frac{E_o(k+1, \sigma, \rho, \mathbf{q})}{k+1}$ が成り立てば, $D_5 \supseteq D_6$ がいえる．このためには, $E_o(k, \sigma, \rho, \mathbf{q})$ の k に対する凸性を示せばよい．すなわち, $0 < \lambda < 1$ に対し,

$$\begin{aligned} & \lambda E_o(k_1, \sigma, \rho, \mathbf{q}) + (1-\lambda) E_o(k_2, \sigma, \rho, \mathbf{q}) \\ & \leq E_o(\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2, \sigma, \rho, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 30)$$

を示せばよい．式 (A·30) の左辺, $\lambda E_o(k_1, \sigma, \rho, \mathbf{q}) + (1-\lambda) E_o(k_2, \sigma, \rho, \mathbf{q})$ について $-\ln[\cdot]$ をはずせば,

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-k_1 \sigma} \right) \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\sigma/\rho} \right)^{k_1 \rho} \right]^\lambda \\ & \left[\sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-k_2 \sigma} \right) \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\sigma/\rho} \right)^{k_2 \rho} \right]^{1-\lambda} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 31)$$

一方, 式 (A·30) の右辺, $E_o(\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2, \sigma, \rho, \mathbf{q})$ について $-\ln[\cdot]$ をはずせば,

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-[\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2] \sigma} \right) \\ & \cdot \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\sigma/\rho} \right)^{[\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2] \rho} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 32)$$

である．これら両者の大小関係を比較しよう．

式 (A·31) は, ヘルダーの不等式 [13] を用いれば,

式 (A.31)

$$\begin{aligned}
 &\geq \sum_{j \in B} \left[\left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-k_1\sigma} \right) \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\sigma/\rho} \right)^{k_1\rho} \right]^\lambda \\
 &\quad \left[\left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-k_2\sigma} \right) \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\sigma/\rho} \right)^{k_2\rho} \right]^{1-\lambda} \\
 &= \sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-k_1\sigma} \right)^\lambda \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-k_2\sigma} \right)^{1-\lambda} \\
 &\quad \cdot \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{\sigma/\rho} \right)^{\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2} \quad (\text{A.33})
 \end{aligned}$$

式 (A.33) の項に再びヘルダーの不等式を用いて導かれる以下の不等式、

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-k_1\sigma} \right)^\lambda \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-k_2\sigma} \right)^{1-\lambda} \\
 &\geq \left(\sum_{i \in A} q_i P_{ji}^{1-[\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2]\sigma} \right) \quad (\text{A.34})
 \end{aligned}$$

を用いれば、式 (A.33) が式 (A.32) で下から押さえられることが示せる。すなわち、補題が証明された。

以上の補題を用いて、次の定理が導ける。

[定理 A-1]

$$D_7 = \{(\sigma, \rho) | E_o(S, \sigma, \rho, \mathbf{q}) > \rho SR\}$$

とおけば、 $D_3 \supseteq D_7$ 。

(証明) 補題 A-1 及び、補題 A-2 を用いれば、 $m_i, i = 1, 2, \dots, k$ に対し、 $1 \leq m_i \leq \ell$ であるから、

$$\begin{aligned}
 &\left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(1, \ell\sigma, \frac{\ell}{m_i}\rho, \mathbf{q})}{\frac{\ell}{m_i}\rho} > R \right\} \\
 &\supseteq \left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(1, \ell\sigma, \ell\rho, \mathbf{q})}{\ell\rho} > R \right\} \quad (\text{A.35})
 \end{aligned}$$

$1 \leq \ell \leq S$ であるから、補題 A-3 を用いれば、

$$\begin{aligned}
 &\left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(1, \ell\sigma, \ell\rho, \mathbf{q})}{\ell\rho} > R \right\} \\
 &= \left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(\ell, \sigma, \rho, \mathbf{q})}{\ell\rho} > R \right\} \\
 &\supseteq \left\{ (\sigma, \rho) \mid \frac{E_o(S, \sigma, \rho, \mathbf{q})}{S\rho} > R \right\}
 \end{aligned}$$

よって、題意は証明された。

Ap.4 補題 1, 2 から補題 4 の導出について

補題 1 と補題 2 では、アンサンブルに対する平均の上界を算出し、各々の確率を達成する符号が、それぞれ存在することが明らかとなった。ここでは、これらより、以下に示す不等式を同時に満たす符号が存在すること、すなわち、補題 4 の証明を示す。

(補題 4 の証明) 補題 1, 補題 2 及び Chebyshev の不等式により、以下の二つの不等式が成り立つことに注意する。

$$Pr[Pr(E_1) > 2\mathcal{E}Pr(E_1)] < \frac{1}{2},$$

$$Pr[Pr(E_2) > 2\mathcal{E}Pr(E_2)] < \frac{1}{2}$$

これら二つの不等式から、

$$\begin{aligned}
 &Pr \left[[Pr(E_1) > 2\mathcal{E}Pr(E_1)] \right. \\
 &\quad \left. \cup [Pr(E_2) > 2\mathcal{E}Pr(E_2)] \right] < 1 \quad (\text{A.36})
 \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}
 &1 - Pr \left[[Pr(E_1) > 2\mathcal{E}Pr(E_1)] \right. \\
 &\quad \left. \cup [Pr(E_2) > 2\mathcal{E}Pr(E_2)] \right] > 0 \quad (\text{A.37})
 \end{aligned}$$

したがって、 $Pr[\cdot]$ の中の否定をとれば、

$$\begin{aligned}
 &Pr \left[[Pr(E_1) \leq 2\mathcal{E}Pr(E_1)] \right. \\
 &\quad \left. \cap [Pr(E_2) \leq 2\mathcal{E}Pr(E_2)] \right] > 0 \quad (\text{A.38})
 \end{aligned}$$

すなわち、補題 4 が成り立つ。

(平成 11 年 2 月 15 日受付, 7 月 6 日再受付)



新家 稔央 (正員)

昭 63 早大・理工・工業経営卒。平 2 同大大学院理工学研究科修士課程了。平 2 同博士後期課程入学, 平 5 同中退。平 3 早大理工学部助手。平 7 早大理工総研嘱託研究員。湘南工大, 職業能力開発大非常勤講師。平 10 より, 神奈川工科大電気電子工学科助手。情報理論, 特に通信路符号化について勉強中。情報理論とその応用学会, IEEE, 各会員。



松嶋 敏泰 (正員)

昭 53 早大・理工・工業経営卒。昭 55 同大大学院修士課程了。同年, 日電入社。昭 61 早大・理工学研究科・博士後期課程入学。平 1 横浜商科大学講師。平 3 同大助教授。平 4 早大・理工学部・工業経営学科(現在経営システム工学科)助教授, 平 9 同大教授, 現在に至る。知識情報処理及び情報理論とその応用に関する研究に従事。工博。IEEE, 情報理論とその応用学会, 人工知能学会, 情報処理学会, OR 学会, 日本経営工学会等各会員。



平澤 茂一 (正員)

昭 36 早大・理工・数学卒。昭 38 同電気通信卒。同年三菱電機入社。昭 56 早大・理工・工業経営学科(現在経営システム工学科)教授, 現在に至る。情報理論とその応用, データ伝送方式, 並びに計算機応用システムの開発などの研究に従事。工博。昭 54 UCLA 計算機科学科客員研究員。昭 60 ハンガリー科学アカデミー, 昭 61 イトリエステ大学客員研究員。平 5 電子情報通信学会小林記念特別賞, 業績賞受賞。IEEE Fellow, 情報理論とその応用学会, 人工知能学会, 情報処理学会, OR 学会, 日本経営工学会等各会員。